EDUKACJA FILOZOFICZNA RECENZJE I NOTY
Vol. 55 2013

STANISŁAW KRAJEWSKI

CZYM JEST DOWÓD MATEMATYCZNY?

Krzysztof Wójtowicz: *O pojęciu dowodu w matematyce*. Toruń, Wydawnictwo UMK, 2012, 250 s.

Każdy, kto bliżej zetknął się z matematyką, zapoznał się z dowodami matematycznymi. Wiele osób prześledziło setki dowodów, a zawodowi matematycy wymyślili wiele nowych. Jednak nie da się precyzyjnie zdefiniować, czym jest dowód. Nawet ludzie o dużym doświadczeniu w dowodzeniu nie są w stanie podać adekwatnej charakteryzacji. Można oczywiście wskazać wiele przykładów, ale najwyraźniej mamy do czynienia z jednym z tych pojęć, które odnoszą się do sytuacji, które po odpowiednim treningu rozpoznajemy, gdy się z nimi stykamy, ale nie sposób w pełni je scharakteryzować.

Są oczywiście różne próby opisywania dowodów. Na jednym biegunie jest pojęcie dowodu formalnego: jest to ciąg formuł określonego języka formalnego, które albo powstają z poprzednich formuł przez ściśle określone reguły wnioskowania, albo też są przyjęte jako aksjomaty. Oczywiście pojawia się pytanie, na jakiej podstawie przyjmuje się pewne stwierdzenia jako aksjomaty, które nie potrzebują dowodu. W historii matematyki najpierw pojawiła się koncepcja, że aksjomaty są oczywiste, bo opisują podstawowe cechy pojęć znanych z życia, a w wieku XIX pojawiła się idea, że aksjomaty mogą być hipotezami, a wreszcie, że w zasadzie mogą być dowolne, o ile nie prowadzą do sprzeczności. Nie jest to wszakże ewolucja wyłącznie jednokierunkowa. Na przykład teoria mnogości zakłóca obraz jednokierunkowej przemiany: jest w niej obecna zarówno aksjomatyka jako wyraz oczywistych cech zbiorów, jak i różne aksjomatyzacje, które mogą nawet być wzajemnie niezgodne.

Na drugim biegunie w sferze prób definiowania dowodów znajduje się określenie w gruncie rzeczy tautologiczne: dowodem jest to, co matematycy uznają za dowód. Nie jest to wszelako sformułowanie zupełnie bezsensowne: okazuje się, że zakres rozumowań, które uznaje się za pełnoprawny dowód matematyczny ulega zmianom. Pojawiają się nowe sposoby argumentacji, których przynależność do szlachetnej kategorii dowodów matematycznych jest niepewna i podlega dyskusji. Krzysztof Wojtowicz opublikował cenną książkę na ten temat.

Książka *O pojęciu dowodu w matematyce* jest poświęcona przede wszystkim opisowi i dyskusji niektórych nowych, i czasem jedynie hipotetycznych, metod argumentacji na rzecz prawdziwości stwierdzeń matematycznych. Autor porusza też inne problemy, np. kwestię relacji między dowodami formalnymi a dowodami spotykanymi w praktyce matematycznej. Pierwszy rozdział książki zawiera uwagi historyczne, drugi opisuje koncepcję Imre Lakatosa, trzeci – dowody komputerowe, czwarty – obliczenia kwantowe, a piąty – tzw. hiperobliczenia.

Rozdział pierwszy przedstawia narastającą od 19. wieku świadomość napięcia między treściowym a formalnym ujęciem matematyki. W rozdziale drugim ukazana jest argumentacja Lakatosa, która zachwiała tezą o możliwości uzyskania niewzruszonych podstaw dla matematyki. Pokazał on bowiem na przykładzie perypetii z dowodem wzoru Eulera dla wielościanów, jak w żywej matematyce przeplata się dowodzenie i obalanie dowodów poprzez wskazywanie kontrprzykładów, co z kolei prowadzi do wysubtelnionych dowodów. Lakatos rozwija więc metodologiczny *quasi*-empiryzm, wedle którego dowody matematyczne to sposoby argumentacji, które mogą być zawodne, podobnie jak w naukach przyrodniczych. Wójtowicz uważa – moim zdaniem słusznie – że koncepcja Lakatosa jest zbyt radykalna, bo choć trafnie wydobywa wagę matematyki nieformalnej, która zawsze jest glebą dla teorii formalnych, to jednak rodzi nowe problemy; dla przykładu nie jest jasne, czy da się w sposób przekonujący wskazać nieformalny falsyfikator dla którejś z uznanych ważnych teorii formalnych.

Rozdział trzeci, poświęcony dowodom komputerowym, które można uznać za w pewnym sensie czysto formalne, stawia na początku kwestię relacji między dowodem realnym a jego formalizacją. Krytycznie omówiona jest koncepcja Azzouniego, wedle której dowód matematyczny jest praktycznie wystarczającym w oczach ekspertów wskazaniem na istnienie dowodu idealnego, czyli formalnego (algorytmicznego). Następnie omawia zróżnicowane reakcje na „kanoniczny" przykład dowodu komputerowego, a mianowicie dowód twierdzenia o czterech barwach. Dzięki temu dowodowi – powtarzanemu kilka razy przy użyciu innych programów i oczywiście na innych maszynach – mamy praktyczną pewność, że każdą mapę da się pokolorować czterema barwami tak, by państwa o tym samym kolorze nie miały wspólnego odcinka granicy. Główna nowość tej sytuacji to, wedle klasycznej analizy Tymoczki, nieusuwalna nieprzejrzystość dowodu i jego empiryczność, czyli fakt, że jego adekwatność musi się opierać na zaufaniu do programistów i inżynierów. Natomiast wedle Roty i innych, dowód godny tego miana musi unaocznić racje, dla których twierdzenie jest prawdziwe, a nie tylko sam fakt jego prawdziwości. Jednak pozostaje wysoce niejasne, czym jest wyjaśnianie w matematyce.

Rozdział czwarty przedstawia hipotetyczne komputery kwantowe, które operują na tzw. kubitach. Matematycznie są to wektory w dwuwymiarowej zespolonej przestrzeni Hilberta. Algorytm Shora i inne algorytmy kwantowe umożliwiają szybkie rozwiązanie problemów, których nie da się najprawdopodobniej rozwiązać przy użyciu algorytmów klasycznych. Jest to na razie teoria, a praktyczne użycie takich algorytmów to wciąż tylko spekulacja. Umożliwia jednak rozważenie hipotetycznego „kwantowego dowodu". Byłby to odpowiednio skonstruowany proces fizyczny, po którego zakończeniu odczytanie wyniku odpowiedniego pomiaru pozwalałoby np. na ustalenie, czy zachodzi twierdzenie, którego rozstrzygnięcie klasyczne wymagałoby astronomicznej liczby kroków. W ten sposób fizyczna natura procesu stałaby się naprawdę istotna, bo ów hipotetyczny dowód w żaden sposób nie przypominałby ani dowodów ludzkich, ani zwykłych dowodów komputerowych.

Piąty rozdział zawiera rozważania na temat innego hipotetycznego wzmocnienia pojęcia obliczalności, które wykracza poza standardowe pojęcie obliczalności w sensie Turinga, czyli rekurencyjności. Chodzi o hiperobliczenia, np. wykonanie nieskończenie wielu kroków w skończonym czasie. Kroki musiałyby więc być coraz krótsze – przypomina to oczywiście starożytne aporie. Istnieją też inne modele. Co więcej, próbuje się wskazywać możliwe fizyczne implementacje takich hiperobliczeń. Wójtowicz referuje ideę tzw. relatywistycznej maszyny Turinga. Wedle niedawnych prac na ten temat, mógłby istnieć, zgodnie z prawami fizyki, układ dwu komputerów, z których jeden przeprowadzałby zwykłe obliczenia w nieskończoność i komunikował wynik drugiemu, który by jednocześnie zbliżał się do odpowiedniego typu czarnej dziury. W chwili przekroczenia granicy dziury ten drugi wiedziałby, jaki jest wynik wszystkich obliczeń pierwszego. To dawałoby wiedzę matematyczną jakościowo inną niż dotychczasowa, bo pochodzącą od niezrozumiałej wyroczni i oczywiście bez żadnych zysków eksplanacyjnych i bez umożliwienia nam głębszego zrozumienia sytuacji matematycznej, do której odnosi się w taki sposób rozstrzygnięte twierdzenie.

Filozoficznym zyskiem z hipotezy o istnieniu hiperobliczeń – zauważa autor omawianej książki – jest możliwość połączenia naturalizmu z odrzuceniem komputacjonizmu, czyli poglądu, wedle którego umysł jest skomplikowaną maszyną liczącą w sensie Turinga. Wójtowicz broni modeli hiperobliczeń jako nie tyle dość dzikich spekulacji, ale hipotez dostatecznie osadzonych w realiach fizycznych (co oczywiście nie oznacza, że dostępnych praktycznie). Powołuje się na autorów (Nemeti i David), którzy tak twierdzą, ale nie przytacza argumentów przeciw dla przykładu następującej wątpliwości: wejście w czarną dziurę dałoby może wiedzę o całym nieskończonym obliczeniu komputera ziemskiego, ale – jak mi się wydaje – nawet teoretycznie, nie mówiąc już o ewentualnej praktyce, nie byłoby możliwości przekazania jej na Ziemię. Inna rzecz, że bliższe rozważenie tej kwestii wymagałoby wejścia w specjalistyczne rozważania z zakresu fizyki.

Książka jest jasno i starannie napisana. Jest raczej wyjątkiem potknięcie w przypisie 3 na s. 136 oraz przypisie 1 na s. 157: w obu powinno być na końcu nie tyle „rozwiązanie” co „rozwiązanie w liczbach całkowitych”. W książce zawarte jest ponadto jedno merytoryczne przeoczenie. Na s. 179 autor rozważa wyobrażenie, że relatywistyczny komputer informuje nas, iż hipoteza Goldbacha jest niezależna od teorii mnogości ZFC. Jednak nie zauważa, że taka hipotetyczna sytuacja byłby w gruncie rzeczy dowodem hipotezy Goldbacha. Jest tak, o ile założymy, że ta hipoteza jest prawdziwa lub fałszywa, co wydaje się bardzo naturalne i jest powszechnie przyjmowane. Rzecz w tym, że gdyby była fałszywa, nie mogłaby być niezależna od ZFC, albowiem istniałby konkretny przykład liczby parzystej, która nie jest sumą dwu liczb pierwszych, a sprawdzenie tego jest całkowicie elementarne. Oczywiście gdyby ten kontrprzykład był liczbą bardzo wielką, nie starczyłoby nam czasu na sprawdzenie braku odpowiednich składników będących liczbami pierwszymi, ale od takich ograniczeń praktycznych w tego typu rozważaniach abstrahujemy i czyni tak Wójtowicz. W każdym razie fakt, że jakaś liczba jest kontrprzykładem na hipotezę Goldbacha, nie może być niezależny. (Sam Wójtowicz wspomina zresztą coś bardzo temu bliskiego na s. 180 w przypisie 43.) Z tego wynika, że gdyby hipoteza Goldbacha była niezależna od ZFC czy jakiejkolwiek teorii zawierającej elementarną arytmetykę, to *ipso facto* byłaby prawdziwa! Wymagałaby natomiast środków dowodowych wykraczających poza ZFC czy inną rozważaną teorię. Nieuwzględnienie tego faktu nie narusza jednak zasadniczo rozważań filozoficznych, należy tylko w kilku miejscach (nie we wszystkich) podstawić zamiast hipotezy Goldbacha zdanie arytmetyczne o bardziej skomplikowanej strukturze logicznej.

Książka Wójtowicza jest oparta na obszernej bibliografii. Autor omawia zarówno dowodzenie komputerowe, jak obliczenia kwantowe i dyskusję dotyczącą hiperobliczeń, a także problematykę wynikającą z przełomowej pracy Lakatosa, w sposób systematyczny, kompetentny i przejrzysty. Dobrze zarysowuje pole problemowe i w pewnym stopniu je systematyzuje, co jest cenne niezależnie od tego, że – jak można zauważyć – nie dodaje istotnych nowości do elementów znanych z literatury przedmiotu. Należy podkreślić, że autor rzetelnie powołuje się na źródła, wykorzystując najlepsze opracowania omawianych tematów, oczywiście prawie wyłącznie angielskojęzyczne. Książka jest dobrą popularyzacją różnych nowych modeli obliczeń, rozwija analizę ich wartości i dostarcza materiału do rozważań kwestii filozoficznych. Należy do nich nie tylko kwestia statusu dowodu, ale także takie zagadnienia jak: czym jest wyjaśnianie w matematyce, czym jest rozumienie w matematyce, a wreszcie problem empirycznych uwarunkowań matematyki. Oczywiście tematyka ta daleka jest od wyczerpania. Niewątpliwie Wojtowicz ma rację twierdząc, że filozofia matematyki ma się dobrze.