Edukacja Filozoficzna 68/2019
ISSN 0860-3839
DOI: 10.14394/edufil.2019.0020
ORCID: 0000-0002-1933-1892

Antynomia Russella a wiedza *a priori*

Zbigniew Król
(Politechnika Warszawska, Wydział Administracji i Nauk Społecznych,
Międzynarodowe Centrum Ontologii Formalnej)

W pracy tej proponuję wyjaśnienie zagadki zawodności poznania apriorycznego przez odwołanie się do obecności w nim wiedzy tła (*tacit knowledge*) oraz przez wskazanie szerszej struktury intelektualnych powiązań pomiędzy intuicyjnymi danymi i przekonaniami w ramach tzw. horyzontu hermeneutycznego. Nieapodyktyczność i praktyczna zawodność rezultatów poznania *a priori* nie są argumentami przeciwko jego istnieniu i możliwości.

Analiz dokonam głównie na przykładzie dotyczącym antynomii Russella. Nie omawiam różnych koncepcji poznania *a priori*, gdyż dla potrzeb argumentacji przedstawionej w tym tekście nie jest to konieczne. Należy jednak zaznaczyć, że problem pochodzenia wiedzy *a priori* – tzn. skąd genetycznie da się wywieść tego rodzaju poznanie, a w szczególności, że inspiracją dla niego, w oczywisty sposób, może być doświadczenie zmysłowe (np. spostrzeżenia wzrokowe pewnych przedmiotów realnych) – jest bez znaczenia dla poruszanej kwestii. Wynika to z faktu, że wiedza *a priori* nie dotyczy bezpośrednio obiektów zmysłowych i formułowana jest *in statu nascendi* bez użycia empirii. Nie da się uzasadnić oczywistości na przykład aksjomatu komprehensji poprzez wskazywanie określonych doświadczeń zmysłowych, spostrzeżeń czy doznań konkretnych osób lub ich grup. Istotną rolę w tym ma natomiast doświadczenie intelektualne. Rzecz pomyślana nie jest rzeczą zmysłowo daną.

Zanim podam sformułowanie antynomii Russella, warto zauważyć, że jej podstawowa i powszechnie znana filozoficzna konsekwencja dotyczy właśnie oceny wartości poznawczej wiedzy intuicyjnej, która jest uzyskiwania na podstawie dostrzegania pewnych intuicyjnie oczywistych i – jak się wydaje – apodyktycznie koniecznych praw i własności. Jak zatem powszechnie wiadomo, antynomia ta może być użyta jako przykład zawodności wiedzy intuicyjnej: zawodności narzucającej się oczywistości czegoś. Z tego zaś, zdaniem wielu[1], wynika konieczność odrzucenia istnienia wiedzy apriorycznej i jej klasycznej koncepcji, zgodnie z którą, wiedza *a priori* jest wiedzą naoczną, czysto intelektualną, nieempiryczną, pozaformalną, pewną, konieczną, apodyktycznie prawdziwą i niepowątpiewalną. Rezultaty tej wiedzy mogą jednak dotyczyć poznania empirycznego; por. np. aprioryczne prawa dotyczące spostrzeżenia wzrokowego, jakości barwnych etc. Z powodu wykrycia zawodności wiedzy intuicyjnej matematycy zaczęli stosować ścisłą formalizację i aksjomatyzację oraz odeszli od intuicyjnej wersji teorii zbiorów Georga Cantora.

Sprawa wiedzy *a priori* w matematyce związana jest z szeregiem kolejnych kwestii, np. czy istnieją pozaformalne, czysto intelektualne *fakty* w matematyce, tzn. dane obiektywnie, określone nie tylko w wyniku *uprzedniego* zadania ścisłej formalizacji i reguł inferencji? Czy rzeczywiście w matematyce *anything goes*? Czy matematyka to *tylko* dziedzina szeroko pojętej kultury, rozwijająca się jedynie jako forma swobodnego, nieokreślonego rzeczowo dyskursu w świecie zdeterminowanym prawami socjologii, ekonomii i polityki, gdzie jedyna konieczność wynika z przyjętych konwencjonalnie reguł i gdzie chwilowa i przemijająca jej postać jest wynikiem *consensus communis* pewnej grupy specjalistów?

W matematyce tego typu sytuacje kryzysowe występowałyby jedynie wówczas, gdyby matematycy nie mogli ustalić wspólnego stanowiska. Rozwiązaniem danego problemu byłoby przyjęcie jakiegokolwiek rozwiązania (np. *ad hoc*), nawet niejawnie absurdalnego, byleby zostało ono zaakceptowane czasowo *ex cathedra*.

Jednym ze zwolenników wiedzy apriorycznej w matematyce i jej fenomenologicznej koncepcji był Kurt Gödel. Wskazywał on, że źródłem, z którego wyrasta wiedza matematyczna, jest wiedza pozaformalna i wglądy. W szczególności wyróżnił „matematykę właściwą" jako ogół tych prawd matematycznych, które są oczywiste nie na podstawie dowodu formalnego, lecz na podstawie wglądu.

[1] Literaturę i przegląd stanowisk do tego zagadnienia podaję w pracy Z. Król *Intuition and History: Change and the Growth of Mathematical Knowledge*, „International Journal for Knowledge and Systems Science" 2005, Vol. 2(3), s. 22–32.

dania „matematyki właściwej" – *proper mathematics* – mają prawdziwość absolutną, tj. niezależną od konkretnej formalizacji i teorii. Zdania takie – zdaniem Gödla – muszą istnieć zawsze, a ich przykładem są zdania typu: „Jeżeli przyjąć takie a takie aksjomaty, to prawdziwe jest takie a takie twierdzenie", czy pojedyncze zdania finitystycznej teorii liczb naturalnych (np. „2 + 2 = 4"). Gödel pisał[2]:

> (…) [Z]adanie zaksjomatyzowania matematyki właściwej odbiega od zwykłego rozumienia aksjomatyki, w pierwszym przypadku bowiem aksjomaty nie są dowolne, lecz muszą stanowić trafne zdania matematyczne, w dodatku oczywiste bez dowodu. Nie sposób uniknąć konieczności przyjmowania pewnych aksjomatów lub reguł wnioskowania jako oczywistych bez dowodu, dowody muszą bowiem mieć jakiś początek[3].
>
> Niesprzeczność ta [tj. aksjomatyzacji matematyki właściwej] jest czymś oczywistym (można jej więc nie zakładać), jeżeli teorię mnogości uznajemy za matematykę właściwą. (…) Jeżeli bowiem rozważane aksjomaty jawią mu się jako trafne, to jawią mu się one również (z tą samą pewnością) jako niesprzeczne. Posiada zatem wgląd matematyczny niewywodliwy z jego aksjomatów[4].
>
> (…) [D]la dowolnego dobrze określonego systemu aksjomatów i reguł zdanie stwierdzające ich niesprzeczność (a raczej równoważne mu zdanie teorii liczb) jest niedowodliwe na podstawie tych aksjomatów i reguł, o ile te aksjomaty i reguły są niesprzeczne i wystarczą do wyprowadzenia określonego fragmentu finitystycznej arytmetyki liczb całkowitych. Właśnie to twierdzenie szczególnie dobrze uwidacznia zasadniczą niezupełność matematyki. Albowiem wyklucza ono, by ktoś zbudował pewien dobrze określony system aksjomatów i reguł i niesprzecznie wygłosił następujące zdanie na jego temat: Wszystkie te aksjomaty i reguły jawią mi się (z matematyczną pewnością) jako trafne, a ponadto uważam, że zawierają one całość matematyki[5].

---

2 Por. K. Gödel, *Some basic theorems on the foundations of mathematics and their implications*; w: K. Gödel, *Collected Works*, t. III: *Unpublished Essays and Lectures*, ed. S. Feferman, New York, Oxford 1995, s. 304–323. Cytaty podaję w tłumaczeniu Marcina Poręby: K. Gödel, *O pewnych zasadniczych twierdzeniach dotyczących podstaw matematyki i wnioskach z nich płynących*, „Studia Semiotyczne" 2019, nr 32(2), s. 9–32.

3 K. Gödel, *O pewnych zasadniczych twierdzeniach dotyczących podstaw matematyki i wnioskach z nich płynących*, dz. cyt., s. 10.

4 Tamże, s. 15.

5 Tamże, s. 14–15. Emfaza pochodzi od Gödla.

Gödel formułował swoje przekonania na podstawie rezultatów i doświadczeń matematycznych, do których doszedł, dowodząc swych słynnych twierdzeń[6]. Był zwolennikiem poznania w ramach wglądu matematycznego, dzięki któremu uzyskujemy niepowątpiewalny dostęp do pewnych prawd matematycznych. Był więc zwolennikiem (pewnej formy) wiedzy i poznania *a priori*.

Konstruując matematykę właściwą, musimy jednak liczyć się z określonymi uwarunkowaniami, gdyż – jak wiemy – pewne oczywiste zasady i wglądy mogą okazać się zawodne. W szczególności dotyczy to antynomii Russella. Jest ona przykładem obiektywnego problemu intelektualnego, którego nie da się pominąć i rozstrzygnąć czysto konwencjonalnie. Nie da się go uznać za mało ważny ani w matematyce i logice, ani w filozofii. Z drugiej strony jest to trudność domagająca się rozwiązania i odpowiedzi, gdyż bez tej odpowiedzi pewne ważne teorie naukowe – również te istotne w przyrodoznawstwie – przestają być dobrymi i racjonalnymi teoriami naukowymi. Problem jest także intrygujący z czysto intelektualnego punktu widzenia: jak jest możliwe, że coś, co wydaje nam się niepodważalnie oczywiste, okazuje się czymś nieprawdziwym i zawodnym. Gdzie tkwi źródło *błędu*? Nawet odrzucając możliwość poznania apriorycznego, pozostaje do wyjaśnienia, jak to jest możliwe, że zazwyczaj wyniki uzyskiwane w oparciu na poczuciu oczywistości okazują się jednak poprawne. Odpowiedź na postawione pytania okazuje się istotnie niezależna od psychologii, socjologii, ekonomii i kulturoznawstwa.

Antynomia Russella jest formułowalna w intuicyjnym, potocznym języku. Staje się ona wzorcem dla pewnych sytuacji, które mogą pojawić się w całkowicie sformalizowanych językach sztucznych i wyrażonych w nich teoriach budowanych dla potrzeb matematyki, logiki i – na przykład – fizyki. W czasie budowy takich języków i teorii musimy się z tą antynomią liczyć i jej unikać. Obecnie, tj. po jej odkryciu w sformalizowanym kontekście, uwzględniamy ją jednak wcześniej, tj. *zanim* dokonamy formalizacji.

Na czym polega antynomia Russella i dlaczego wydaje się wynikać ze skądinąd oczywistych i apodyktycznie prawdziwych zasad, takich jak aksjomat komprehensji? Aksjomat ten stwierdza, że używając dowolnych własności, zawsze możemy utworzyć zbiór, do którego należą wszystkie i tylko te przedmioty, które posiadają daną własność. Na przykład własność bycia mieszkańcem Warszawy

[6] Por. omówienie tych spraw w pracy S. Krajewski, *Twierdzenie Gödla i jego interpretacje filozoficzne. Od mechanicyzmu do postmodernizmu*, Warszawa 2003.

wyznacza pewien obiekt, który nazywamy „zbiorem mieszkańców Warszawy". Albo własność „bycie członkiem rady naukowej pewnej instytucji" wyznacza zbiór, do którego należą określone osoby. Zbiór ten nie jest żadną osobą, jest natomiast pewnym nowym, abstrakcyjnym obiektem: jest czymś więcej niż tylko luźną grupą swoich elementów. Jest nową *całością*, która *jest czymś więcej* niż elementy ją tworzące. Widać to wyraźnie wtedy, gdy zaczynamy wykonywać pewne operacje na zbiorach.

Często różne własności wyznaczają zbiory o identycznych elementach. Na przykład zbiór, którego elementami są osoby znajdujące się na określonej liście mailingowej i osoby będące członkami rady naukowej pewnej instytucji Przypadkiem jest tak, że każda osoba, która należy do zbioru osób będących członkiem tej rady naukowej, jest na naszej liście. Zazwyczaj przyjmuje się, że te dwie różne własności wyznaczają jeden i ten sam zbiór, gdyż można *założyć*, że zbiory uznajemy za identyczne, jeśli mają te same elementy. Taka koncepcję zbioru zwana jest *ekstensjonalną*. W koncepcji ekstensjonalnej uznajemy za drugorzędny powód, dla którego łączymy w zbiór elementy, a ważny jest tylko wynik tej operacji łączenia, tj. *które* elementy trafiają do zbioru[7].

Ludzie nie od razu zauważyli, że istnieje możliwość traktowania wielości dowolnych przedmiotów jako nowego abstrakcyjnego przedmiotu, mającego nowe własności nie będące sumą własności swoich elementów. Okazuje się zatem, że aby powstał zbiór, musimy pomyśleć pewną nową całość i ująć jako całość pewną dowolną wielość elementów. Inaczej nie potrafilibyśmy odróżnić dwóch całości złożonych odpowiednio z dwóch i trzech elementów od jednego zbioru pięcioelementowego. To ujęcie całości, niezależnie od tego, jakiego jest charakteru, tzn. czy jest jedynie czymś pomyślanym, czy istniejącym niezależnie od jakichkolwiek aktów świadomości, jest czymś realnym. Wszędzie, gdzie jest wielość – jak się zdaje – istnieje aprioryczna i niczym nieograniczona możliwość tworzenia zbiorów. Dlatego jest nieistotne, czy zbiory już „tam" są gotowe, czy też trzeba je ująć lub „zawiązać". Nie jest to też zadaniem psychologii wyjaśnić, co się wtedy

7 Pomijam tu rozważania dotyczące różnicy pomiędzy koncepcją „zbioru czegoś", czyli zbioru, którego elementy są pewnymi określonymi obiektami, np. ludźmi, przestrzeniami liniowymi, a koncepcją „zbioru bezjakościowych punktów", którego elementami są obiekty w danej formalnej teorii zbiorów (lub ściślej: w jej modelu), np. w ZFC, lub zbiorów utworzonych przez „atomy", czyli „punkty" nie posiadające struktury wewnętrznej, w tym struktury teoriomnogościowej. Przykładem takiego atomu jest zbiór pusty lub atomy w ZFA (teorii zbiorów ZF z atomami). Formalnie, zbiór dwóch algebr Liego jest różny od zbioru dwóch liczb naturalnych, gdyż w sensie ekstensjonalnym nie mają tych samych elementów.

dzieje. Psychologia zajmuje się empirycznymi możliwościami, na przykład tym, że pewne obiekty zostały *przez kogoś* pomyślane, więc stwierdza, że jest możliwym ich pomyślenie *przez kogoś*. Nie jest natomiast w stanie stwierdzić, co jest możliwe bez stwierdzenia faktycznej realizacji jakiegoś procesu psychicznego lub jego zawartości (korelatu). Rzeczywiste współwystępowanie pewnych zjawisk okazuje się nieistotne z apriorycznego i rzeczowego punktu widzenia, nawet jeśli dotyczyłoby każdego realnego człowieka czy uczonego, gdyż istnieje zawsze *możliwość* pomyślenia, że dany proces zachodziłby w inny sposób. Możliwość pomyślenia czegoś nie jest rzeczywistą, a więc empirycznie wykrywalną, realizacją, urzeczywistnieniem czegoś pomyślanego. Prawa aprioryczne przekraczają jednostkowość właściwą prawom empirycznym. Ich zawodność wynika, w przeciwieństwie do praw empirycznych, nie z tego, że są w najlepszym razie indukcyjnymi uogólnieniami, ale z obecności ukrytych założeń, aktywnych w konstytucji towarzyszącego im poczucia oczywistości.

Wydaje się zatem intuicyjnie oczywistym, że dla dowolnej własności istnieje odpowiadający jej zbiór elementów posiadających tę własność. Z intuicyjnego punktu widzenia istnieją zbiory, które zawierają same siebie jako jeden z elementów. Na przykład, zbiór zawierający wszystkie zbiory nieskończone – a jak wiemy z teorii Cantora zbiorów nieskończonych jest nieskończona ilość i tworzą one tzw. raj Cantora. A zatem skoro zbiór zbiorów nieskończonych zawiera nieskończoną ilość elementów, sam jest nieskończony, a więc jest swoim własnym elementem: „*Z* należy do *Z*", gdzie *Z* oznacza „zbiór wszystkich zbiorów, które są nieskończone". Z drugiej strony nie każdy zbiór jest swoim własnym elementem. Na przykład zbiór wszystkich członków rady naukowej określonej instytucji nie jest osobą zatrudnioną w tej instytucji i nie jest członkiem tej rady, nie jest więc swoim własnym elementem.

Teraz możemy powrócić do sformułowania antynomii Russella. Skoro wydaje się, że dla dowolnej własności istnieje odpowiadający jej zbiór elementów posiadających daną własność, to w szczególności możemy utworzyć zbiór, do którego należą te zbiory, które nie są swoimi własnymi elementami. Ten zbiór – powiedzmy y – jest nowym zbiorem zawierającym tylko te zbiory x, dla których jest prawdą, że „x nie należy do x". Zbiór y zawiera więc w szczególności nasz wcześniejszy zbiór x złożony z członków rady naukowej danej instytucji. Możemy jednak zapytać, czy zbiór y posiada własność niebycia swoim własnym elementem?

Na podstawie prawa wyłączonego środka istnieją dwie możliwości: albo *y* posiada własność, że „*y* należy do *y*” (czyli że *y* jest swoim własnym elementem), albo *y* posiada własność, że „*y* nie należy do *y*”. W obydwu przypadkach otrzymujemy sprzeczność: jeśli *y* należy do *y*, to *y* posiada własność, że *y* nie należy do *y*, a jeśli *y* nie należy do *y*, to *y* posiada własność, że *y* należy do *y*. Widzimy więc, że *y* należy do *y* wtedy i tylko wtedy, gdy *y* nie należy do *y*. Otrzymujemy więc sprzeczność, gdyż z aksjomatu komprehensji wynikają dwa zdania sprzeczne. Natomiast z dwóch zdań sprzecznych wynika dowolne zdanie i teoria, w której da się sformułować antynomię, czyli dowód zdań sprzecznych, zawiera w zbiorze swoich tez dowolne zdanie. Na przykład jeśli stwierdzamy w takiej teorii, że coś jest takie to a takie, to stwierdzamy, że coś nie jest też takim, gdyż oprócz dowolnego twierdzenia dowodzimy jego zaprzeczenia.

W 1902 roku Gottlob Frege kończył właśnie drugi tom swoich *Grundgesetze der Arithmetik*[8]. Książka była już w druku, gdy otrzymał list od Bertranda Russella donoszący mu, że w pierwszym tomie *Zasad arytmetyki* znajduje się sprzeczność. Była ona sformułowana w nieco inny sposób, niż tutaj podałem, ale dotyczyła w istocie opisanego powyżej problemu. Russell odkrył antynomię ponad rok wcześniej, w czerwcu 1901 roku, a przedstawił ją w 1903 roku w swoich *Principles of Mathematics*[9]. Antynomia była odkryta niezależnie przez Ernsta Zermela około roku 1902 i zakomunikowana Hilbertowi[10]. Skutki tej prostej antynomii były porażające dla systemu Fregego i koncepcji logicyzmu. Ta prosta sprawa wywołała ogromny kryzys w podstawach matematyki w XX wieku, ale z drugiej strony – jak stwierdził Jean Van Heijenoort – „paradoks Russella był ożywczym zaczynem dla współczesnej logiki i zajmowała się nim niezliczona ilość prac”[11]. Przez następne kilkadziesiąt lat uczeni próbowali tak sformułować teorię zbiorów i fundamentalne teorie matematyczne, aby w jak najmniej ograniczony sposób móc używać aksjomatu komprehensji, który dalej wydawał się apodyktycznie prawdziwym, a tylko jego konsekwencje były nie do przyjęcia[12].

8 Por. G. Frege, *Grundgesetze der Arithmetik: begriffsschriftlich abgeleitet*, Jena 1893 (Bd. I), 1903 (Bd. II).

9 Por. B. Russell, *The Principles of Mathematics*, Cambridge 1903.

10 Informacje te podaję za J. Van Heijenoort, *From Frege to Gödel: a source book in mathematical logic, 1871–1931*, Cambridge 1967, s. 124.

11 Tamże.

12 Czytelnik może zapoznać się z tymi sprawami w klasycznej pracy A.A. Fraenkel, Y. Bar-Hillel, A. Lévy *Foundations of set theory*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Vol. 67, Amsterdam, London 1973, *passim*.

Antynomia Russella doprowadziła do powstania aksjomatycznej teorii zbiorów, w tym podstawowego dziś w codziennej praktyce badawczej systemu ZFC (Zermelo–Fraenkela z aksjomatem wyboru) oraz dziesiątków innych systemów teorii zbiorów[13].

W pierwszej chwili rozumowanie doprowadzające do antynomii Russella wydaje się zwykłą żonglerką słowami i powierzchowną sztuczką. Jednak okazuje się, że przyjęcie, iż dowolna wielość elementów może być pomyślana jako całość wydaje się – wbrew poczuciu oczywistości – niezgodne z prawdą, gdyż nie możemy tak w pewnych przypadkach uczynić. Dokładniej mówiąc: założenie to jest niezgodne z *innymi* naszymi intuicjami, a w szczególności z pewnymi nieaktowo przyjętymi ukrytymi założeniami, których przykłady za chwilę podam. Oznacza to, że coś jest nam intuicyjnie dane i przed-rozstrzygnięte, *zanim* rozpoczniemy formalizację. Dlatego zbiór tych przed-określeń, nieaktowych (*implicite*) i aktowych (*explicite* sformułowanych) decyzji – czyli intelektualne środowisko, w którym tworzona jest wiedza matematyczna – nazywam *horyzontem hermeneutycznym*. Podobnym prostym i niezmiernie istotnym faktem jest paradoks (antynomia) kłamcy, w którym stwierdzenie „to tutaj zapisane zdanie jest zdaniem fałszywym", prowadzi do stwierdzenia, że jeśli zdanie to jest prawdziwe, to musi być tak, jak zdanie to stwierdza, a więc musi być zdaniem fałszywym i *vice versa*.

Zarówno Cantor, jak i inni matematycy, którzy przyczynili się do powstania teorii zbiorów (Boole, Dedekind, Frege, a potem Russell, Zermelo, Fraenkel itd.) intuicyjnie preferowali ekstensjonalną koncepcję zbioru. Koncepcja intensjonalna zbioru to taka, w której traktujemy zbiory jako złożone zarówno z elementów, jak i „otoczki", która łączy je w całość[14]. Przykładem „otoczki" są własności, czyli „powody", dla których elementy trafiają do danego zbioru. Zbiory są więc identyczne intensjonalnie, jeśli mają identyczne nie tylko elementy, ale i otoczki[15]. Aksjomat ekstensjonalności „skleja" wszystkie otoczki i w takiej koncepcji dane elementy mogą utworzyć tylko jeden zbiór. Zbiory intensjonalne są identyczne,

13 Tamże.

14 Różne rodzaje ekstensjonalności, intensjonalności oraz sformułowania odpowiednich aksjomatów przedstawiam w pracy Z. Król *Uwagi o stylu historycznym matematyki i rozwoju matematyki*, w: *Światy matematyki. Tworzenie czy odkrywanie?*, red. I. Bondecka-Krzykowska, J. Pogonowski, Poznań 2010, s. 203–234.

15 Oczywiście, kwestia identyczności otoczek też nie jest trywialna. Możemy jednak roboczo przyjąć, że własności równoważne logicznie (w danej teorii) są identyczne.

jeśli mają zarówno te same elementy, jak i identyczne (np. równoważne logicznie w danej teorii) otoczki. Koncepcja tu podana różni się od zwykle przyjmowanej definicji zbiorów intensjonalnych, gdyż najczęściej za intensjonalne koncepcje uznaje się takie, które zawierają jakiekolwiek ograniczenie tzw. aksjomatu ekstensjonalności: dwa zbiory są identyczne, jeśli mają te same wszystkie elementy[16].

Wspomniałem o „ukrytych nieaktowych założeniach", „przed-rozstrzygnięciach" etc., które odpowiadają za poczucie oczywistości towarzyszące aksjomatowi komprehensji. W chwili obecnej uświadamiamy sobie cały szereg takich dawniej – tj. w początkowym stadium rozwoju teorii zbiorów – ukrytych – czyli nieuświadamianych *explicite* – założeń i „intuicyjnych rozstrzygnięć". Jednym z nich jest właśnie ekstensjonalna koncepcja zbioru i aksjomat ekstensjonalności. Okazuje się, że użycie koncepcji intensjonalnej w wersji z „otoczkami" w pewnych wersjach uniemożliwia sformułowanie antynomii Russella. Z intuicyjnego punktu widzenia, który jednakże może być ściśle sformalizowany, ekstensjonalność polega na utożsamianiu, „zlepianiu", różnych intensjonalnie zbiorów. W wersji intensjonalnej mamy więcej zbiorów, a zbiory różne intensjonalnie są uznawane za identyczne i nieodróżnialne na mocy aksjomatu ekstensjonalności. Jeśli – jak było w początkowej fazie rozwoju teorii zbiorów – przyjmujemy za Dedekindem[17] – aksjomat ekstensjonalności bez uświadamiania sobie możliwych

[16] Por. np. R. Hinnion *Intensional Positive Set Theory*, „Reports on Mathematical Logic" 2006, Vol. 40, s. 107–125, P.C. Gilmore *An intensional type theory: motivation and cut-elimination*, „Journal of Symbolic Logic" 2001, Vol. 66, s. 283–400 oraz program matematyki intensjonalnej (por. *Intensional Mathematics*, ed. S. Shapiro, New York 1984). Por. także P. T. Johnstone, *The point of pointless topology*, „Bulletin of the American Mathematical Society" 1983, Vol. 8(1), s. 41–53.

[17] Aksjomat ten sformułował Dedekind w 1888 roku nastepująco: „Es kommt sehr häufig vor, dass verschiedene Dinge *a*, *b*, *c*, … aus irgend einer Veranlassung einem gemeinsamen Gesichtspunkte aufgefasst, im Geiste zusammengestellt werden, und man sagt dann, dass sie ein System *S* bilden; sie sind enthalten in *S*; umgekehrt besteht *S* aus diesen Elementen. Ein solches System *S* (oder ein Inbegriff, eine Mannigfaltigkeit, eine Gesammtheit) ist als Gegenstand unseres Denkens ebenfalls ein Ding; es ist vollständig bestimmt, wenn von jedem Ding bestimmt ist, ob es Element von *S* ist oder nicht. Das System *S* daher dasselbe wie das System *T*, in Zeichen $S = T$, wenn jedes Element von *S* auch Element von *T*, und jedes Element von *T* auch Element von *S* ist. Für die Gleichfőrmigkeit der Ausdrucksweise ist es vortheilhaft, auch den besonderen Fall zuzulassen, dass ein System *S* aus einem einzigen (aus einem und nur einem) Element *a* besteht, d.h. dass das Ding *a* Element von S, aber jedes von *a* verschiedene Ding kein Element von *S* ist. Dagegen wollen wir das leere System, welches gar kein Element enthält, aus gewissen Gründen hier ganz ausschließen, obwohl es für andere Untersuchungen bequem sein kann, ein solches zu erdichten"; por. R. Dedekind *Was sind und was sollen die Zahlen?*, vierte

jego ograniczeń, to oznacza to dokonanie pewnego *ukrytego* rozstrzygnięcia, czyli akceptacji wyniku pewnych nieuświadamianych operacji intelektualnych, które w tym przypadku polegają na utożsamianiu, „sklejaniu" możliwych do odróżnienia obiektów.

Kolejnym ukrytym przekonaniem i założeniem prowadzącym do całkowicie ściśle określonych rezultatów i teoretycznych decyzji jest przekonanie o jednorodności uniwersum zbiorów. Jednorodność ta polega na *intuicyjnym, nieuświadomionym, choć faktycznie obowiązującym i aktywnie określającym naszą świadomą działalność badawczą, rozstrzygnięciu*, że wszystkie zbiory są porównywalne i są obiektami „jednego i tego samego rodzaju". Formalnie wyraża się to w użyciu tylko jednej, określonej w całym uniwersum, relacji należenia do zbioru. Z kolei możliwość odróżnienia zbiorów i – na przykład – klas, czego rzeczywiście dokonano w celu uniknięcia antynomii Russella (por. np. system NBG – von Neumanna–Bernaysa–Gödla) wskazuje, na czym ta jednorodność dodatkowo może polegać, oraz – wobec możliwości wyróżnienia różnych rodzajów zbiorów – na intuicyjnym wyborze i preferencji koncepcji jednorodnej. Obecnie posługujemy się koncepcjami teorii zbiorów z wieloma relacjami należenia elementu do zbioru[18]. Dawniej, nieaktowo i *implicite* nasza świadomość zdecydowała, że uniwersum jest jednorodne. Antynomia nie powstaje, jeśli użyć np. dwóch różnych relacji należenia elementu do zbioru.

Fakt pozaformalnego sklejania obiektów w środowisku intuicyjnym oraz założenia stojące za narzucającą się intuicyjnie akceptacją antynomii Russella wskazują na istnienie intuicyjnych przed-założeń o charakterze ontologicznym. Antynomię można bowiem odczytać jako *horyzontalną hipotezę* stwierdzającą, że *wszystkie pojęcia są zbiorami* w jednorodnym uniwersum. W tym sensie antynomia jest dowodem nie wprost fałszywości tego założenia: pojęć jest więcej niż jednorodnych zbiorów i nie każdemu pojęciu odpowiada zbiór w ekstensjonalnym środowisku.

Aufsgabe, Braunschweig 1917, s. 1–2 (zachowałem pisownię oryginału).

[18] Por. np. R. Hinnion, *About the coexistence of classical sets with non-classical ones: a survey*, „Logic and Logical Philosophy" 2003, Vol. 11, s. 79–90; M. Randall Holmes *The structure of ordinals and the interpretation of ZF in double extension set theory*, „Studia Logica" 2005, Vol. 79, s. 357–372, A. Kisielewicz, *Double extension set theory*, „Reports on Mathematical Logic" 1989, Vol. 23, s. 81–89, A. Kisielewicz *A very strong set theory?*, „Studia Logica" 1998, Vol. 61, s. 171–178.

Jak już wielokrotnie wskazywałem, analogiczna teza ontologiczna związana była z odkryciem niewspółmierności boku kwadratu z jego przekątną[19]. Pitagorejczycy pierwotnie byli przekonani, że „wszystko jest liczbą naturalną". Innych liczb nie znali, a liczby wymierne, „ułamki", zostały wyeliminowane z matematyki w sposób metodyczny i świadomy. Oznaczało to, że wszystkie obiekty świata i matematyki dało się opisać liczbami naturalnymi i prostymi – kwinta, kwarta, oktawa etc. – proporcjami pomiędzy nimi. Dowód niewspółmierności w wersji przekazanej przez Arystotelesa był dowodem, że tak nie jest, i przebiegał następująco. Załóżmy, że wszystko w świecie da się opisać liczbami naturalnymi. W szczególności dotyczy to wszystkich obiektów geometrycznych i ich własności, a więc na przykład kwadratów. Jeśli bok kwadratu i jego przekątna są opisywane jakimiś liczbami, a wszystkie liczby są liczbami naturalnymi, to jeśli bok i przekątna są pewnymi liczbami, to muszą być albo parzyste, albo nieparzyste. Niezależnie jednak od tego, jaką liczba naturalną jest bok, prowadziło to do stwierdzenia, że przekątna musi być równocześnie liczbą parzystą i nieparzystą, a takiej liczby naturalnej nie ma[20]. Zatem interpretowany ontologicznie dowód niewspółmierności pokazywał, że nie wszystkie obiekty matematyczne są liczbami. Spowodowało to wielowiekowy podział matematyki, nie tylko starożytnej, na dwie zupełnie oddzielone nauki: arytmetykę (wraz z muzyką) i geometrię (wraz z astronomią).

Czy dzisiaj udało się do końca rozwiązać problem antynomii Russella? Moim zdaniem: nie. W dalszym ciągu trwają próby znalezienia wytłumaczenia tej antynomii i znalezienia sensownej strategii jej unikania. Sensowność oznacza jednak intuicyjną jasność i prostotę[21].

---

[19] Por. np. Z. Król, *Platonism and the development of mathematics. Infinity and geometry*, Warszawa 2015.

[20] „For all who effect an argument *per impossibile* infer syllogistically what is false, and prove the original conclusion hypothetically when something impossible results from the assumption of its contradictory; e.g. that the diagonal of the square is incommensurate with the side, because odd numbers are equal to evens if it is supposed to be commensurate. One infers syllogistically that odd numbers come out equal to evens, and one proves hypothetically the incommensurability of the diagonal, since a falsehood results through contradicting this. For this we found to be reasoning *per impossibile*, viz. proving something impossible by means of an hypothesis conceded at the beginning". Arystoteles, *Analytica Priora* 41a, trans. A.J. Jenkinson, w: *The Works of Aristotle*, ed. by W.D. Ross, Vol. 1, Oxford 1928.

[21] Więcej ukrytych założeń, np. przyjęcie klasycznej dwuwartościowej logiki z prawem wyłączonego środka (w logikach wielowartościowych da się uniknąć antynomii Russella) i i inne, wraz z ich rolą omawiam w cytowanej już pracy Z. Król, *Uwagi o stylu historycznym*

Podane przykłady wskazują, że nasze intuicje nie muszą być niesprzeczne. Nie podważają jednak istnienia apriorycznej wiedzy intuicyjnej i jej prawomocności. Dokładniejsza analiza pokazuje, że za każdym „poczuciem oczywistości" stoją określone, najczęściej nieuświadomione i niezwerbalizowane przesłanki horyzontalne[22]. Zawartość horyzontu hermeneutycznego może podlegać ewolucji oraz metodycznej rekonstrukcji. Możliwe jest określenie zawartości *tacit knowledge* dla konkretnych problemów matematycznych, jak i dla określonych teorii lub całości wiedzy matematycznej w określonych epokach, tj. dla matematyki starożytnej, średniowiecznej, nowożytnej. Matematyka współczesna, nawet w wersji ściśle sformalizowanej, także posiada swoją intuicyjną wiedzę tła, a jej przykłady podałem powyżej. Horyzont hermeneutyczny określa styl uprawiania matematyki w danej epoce historycznej.

Próbuję tłumaczyć zmiany wiedzy matematycznej, kryzysy i jej powstawanie, pokazując związek tych procesów z horyzontem hermeneutycznym. Moim zdaniem nie da się wytłumaczyć zmiany w matematyce bez odwołania się do rekonstrukcji horyzontu hermeneutycznego. Rekonstrukcja horyzontu hermeneutycznego dla matematyki współczesnej pozwala na tworzenie nowych teorii matematycznych.

Podam jeszcze jeden przykład wskazujący na wagę i wpływ intuicyjnych przed-rozstrzygnięć w kreacji matematyki, przywołując poczucie apodyktycznej oczywistości związane z piątym postulatem Euklidesa dotyczącym prostych równoległych na płaszczyźnie[23]. Przez ponad dwa tysiące lat uważano, że nie ma

matematyki…, dz. cyt.; Thoralf Skolem, opierając się na twierdzeniu Brouwera o punkcie stałym, pokazał, że aksjomat komprehensji obowiązuje w wielowartościowej logice Łukasiewicza $L_{\aleph_1}$ dla formuł bezkwantyfikatorowych ze zmiennymi wolnymi; por. tenże, *Bemerkungen zum Komprehensionsaxiom*, „Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik" 1957, Vol. 3, s. 1–17. Następnie C.C. Chang uogólnił ten rezultat dla dowolnej formuły z jedną zmienną wolną; por. tenże, *The axiom of comprehension in infinite valued logic*, „Mathematica Scandinavica" 1953, Vol. 13, s. 9–30. Twierdzenia Brouwera o punkcie stałym nie da się zastosować w przypadku logiki $L_{\aleph_0}$. Dalej nie wiemy, czy pełny schemat komprehensji jest niesprzeczny z nieskończenie wielowartościową logiką $L_{\aleph_0}$.

22 Należy odróżnić wiedzę ukrytą od wiedzy niezwerbalizowanej. Typologię różnych rodzajów *tacit knowledge* przedstawiam w pracy Z. Król, *Towards The New Episteme: Basic Methodology for Knowledge and Tacit Knowledge*, w: *Proceedings of the 9th International Symposium on Knowledge and Systems Sciences (KSS2008) Jointly with Knowledge Management in Asia Pacific (KMAP2008), Guangzhou, China, Dec. 11–12, 2008*, s. 279–287.

23 Przez punkt na płaszczyźnie nie leżący na danej prostej da się poprowadzić tylko jedną prostą równoległą do danej. Nie rozpatrywano innych możliwości, np. że nie da się poprowadzić ani jednej takiej prostej lub da się poprowadzić dwie, trzy itd. różne. Wobec wielowiekowych

możliwości pomyślenia o płaszczyźnie w inny sposób oraz że nie ma takiego obiektu, dla którego prawdziwa byłaby negacja tego postulatu. Obecnie wiemy, że w całkowicie racjonalny sposób możemy rozważyć negację piątego postulatu, ale przez długi czas te inne możliwości były zakryte dla naszej wiedzy jawnej[24]. Rozważanie tylko „jednej strony" oznacza zatem, że korzystając z poczucia oczywistości, w pozaformalny sposób dokonaliśmy wyboru tylko jednej z wielu możliwości. Zwróćmy uwagę, że te pozostałe możliwości były sprzeczne z wersją zaakceptowaną.

Wracając zatem do problemu istnienia i prawomocności wiedzy apriorycznej i intuicyjnej, należy stwierdzić, że fakt pojawiania się trudności, sprzeczności, a nawet antynomii nie podważa – stwierdzanego choćby tylko historycznie i rzeczowo – faktu istnienia tej wiedzy, korzystania z niej i uwzględniania w poznaniu. Zawodność tej wiedzy da się wytłumaczyć aktywnym udziałem innych niejawnych rozstrzygnięć.

Powstaje jednak problem: czy jest możliwa taka rekonstrukcja horyzontu hermeneutycznego, że wszystkie ukryte założenia i rozstrzygnięcia stają się uświadomione i że jesteśmy w stanie nad nimi zapanować? Odpowiedź jest prosta: nie jest to możliwe, ale jej uzasadnienie wymaga odwołania się do analiz fenomenologicznych oraz znajomości fenomenologii matematyki. Fenomeny matematyczne (i nie tylko matematyczne, ale także inne aprioryczne) są z istoty niedookreślone, na co wskazuje choćby powszechnie znany i tajemniczy fakt ich ogólności, niejednostkowości, a wyrazem trudności był choćby – trwający do dziś – spór o uniwersalia.

Jeśli w naukach przyrodniczych musimy liczyć się z pewnymi faktami eksperymentalnymi i empirycznymi, to w matematyce i logice musimy liczyć się

---

wysiłków, jakie poświęcono na próby przeprowadzenia dowodu tego aksjomatu z innych zasad i aksjomatów geometrii euklidesowej, zdumiewa fakt braku jakiejkolwiek analizy negacji tego postulatu. Wskazuje to na nasze przywiązanie do danych dostarczanych przez intuicję. Por. także B.A. Rosenfeld, *A history of non-Euclidean geometry: Evolution of the concept of a geometric space*, Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences, Vol. 12, New York, Berlin, Heidelberg, London, Paris, Tokyo 1988.

24 Sytuację racjonalnych zależności i powiązań w horyzoncie hermeneutycznym, gdzie pewna możliwość pojawia się jako apodyktycznie prawdziwa i „nieposiadająca alternatywy", przy równoczesnym obiektywnym istnieniu innych racjonalnych możliwości mogących być ujętymi intelektualnie, a nawet podlegającymi formalizacji, które są jednak niewidoczne dla intuicji w danym momencie historycznym, nazwałem „rozdwojeniem horyzontalnym"; por. Z. Król *Uwagi o stylu historycznym matematyki…*, dz. cyt.

z pewnymi *faktami intelektualnymi*, które są sformułowane w intuicyjnym, intelektualnym metaśrodowisku. Nie jest tak, że możemy pomyśleć sobie w nauce wszystko. Fakty intelektualne, takie jak antynomia Russella, wymuszają przyjęcie lub odrzucenie pewnych *prawd* logicznych i matematycznych. Wszystko to wskazuje na racjonalność zmiany naukowej w matematyce i jej niezależność od nauk przyrodniczych.

Bibliografia

Arystoteles, *Analytica Priora*, trans. A.J. Jenkinson, w: *The Works of Aristotle*, ed. by W. D. Ross, Vol. 1, Oxford 1928.

Chang C.C., *The axiom of comprehension in infinite valued logic*, „Mathematica Scandinavica" 1953, Vol. 13, s. 9–30.

Dedekind R., *Was sind und was sollen die Zahlen?*, vierte Aufsgabe, Braunschweig 1917.

Fraenkel A. A., Bar-Hillel Y., Lévy A., *Foundations of set theory*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Vol. 67, Amsterdam, London 1973.

Frege G., *Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet*, Jena 1893 (Bd. I), 1903 (Bd. II).

Gilmore P., C., *An intensional type theory: motivation and cut-elimination*, „Journal of Symbolic Logic" 2001, Vol. 66, s. 283–400.

Gödel K. *Some basic theorems on the foundations of mathematics and their implications*; w: tegoż, *Collected Works*, Vol. III: *Unpublished Essays and Lectures*, ed. S. Feferman, New York, Oxford, s. 304–323. Tłum. polskie: K. Gödel, *O pewnych zasadniczych twierdzeniach dotyczących podstaw matematyki i wnioskach z nich płynących*, tłum. M. Poręba, „Studia Semiotyczne" 2019, nr 32(2), s. 9–32.

van Heijenoort J., *From Frege to Gödel: a source book in mathematical logic, 1871–1931*, Cambridge 1967.

Hinnion R., *About the coexistence of classical sets with non-classical ones: a survey*, „Logic and Logical Philosophy" 2003, Vol. 11, s. 79–90.

Hinnion R., *Intensional Positive Set Theory*, „Reports on Mathematical Logic" 2006, Vol. 40, s. 107–125.

Johnstone P.T., *The point of pointless topology*, „Bulletin of the American Mathematical Society" 1983, Vol. 8(1), s. 41–53.
Kisielewicz A., *Double extension set theory*, „Reports on Mathematical Logic" 1989, Vol. 23, s. 81–89.
Kisielewicz A., *A very strong set theory?*, „Studia Logica" 1998, Vol. 61, s. 171–178.
Krajewski S., *Twierdzenie Gödla i jego interpretacje filozoficzne. Od mechanicyzmu do postmodernizmu*, Warszawa 2003.
Król, Z., *Intuition and History: Change and the Growth of Mathematical Knowledge*, „International Journal for Knowledge and Systems Science" 2005. Vol. 2(3), s. 22–32.
Król, Z., *Towards The New Episteme: Basic Methodology for Knowledge and Tacit Knowledge*, w: *Proceedings of the 9th International Symposium on Knowledge and Systems Sciences (KSS2008) Jointly with Knowledge Management in Asia Pacific (KMAP2008), Guangzhou, China, Dec. 11 - 12, 2008*, s. 279-287.
Król, Z., *Uwagi o stylu historycznym matematyki i rozwoju matematyki*, w: *Światy matematyki. Tworzenie czy odkrywanie?*, red. I. Bondecka-Krzykowska, J. Pogonowski, Poznań 2010, s. 203–234.
Król, Z., *Platonism and the development of mathematics. Infinity and geometry*, Warszawa 2015.
Randall Holmes M., *The structure of ordinals and the interpretation of ZF in double extension set theory*, „Studia Logica" 2005, Vol. 79, s. 357–372.
Rosenfeld B.A., *A history of non-Euclidean geometry: Evolution of the concept of a geometric space*, Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences, Vol. 12, New York, Berlin, Heidelberg, London, Paris, Tokyo 1988.
Russell B., *The Principles of Mathematics*, Cambridge 1903.
Intensional Mathematics, ed. S. Shapiro, New York 1984.
Skolem T., *Bemerkungen zum Komprehensionaxiom*, „Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik" 1957, Vol. 3, s. 1–17.

Streszczenie

Podaję wyjaśnienie zaskakującej zawodności poznania apriorycznego poprzez odwołanie się do aktywnej obecności wiedzy tła, *tacit knowledge*, i ukrytych założeń w tym poznaniu oraz przez wskazanie szerszej struktury intelektualnych powiązań pomiędzy intuicyjnymi danymi i przekonaniami w ramach tzw. horyzontu hermeneutycznego. Nieapodyktyczność i praktyczna zawodność rezultatów poznania *a priori* nie są argumentami przeciwko jego istnieniu i możliwości. Analizy dokonywane są głównie na przykładzie antynomii Russella i aksjomatu komprehensji. Przykładami ukrytych przed-założeń aktywnych w procesie konstytucji poczucia oczywistości towarzyszącego aksjomatowi komprehensji w określonych etapach rozwoju matematyki są ekstensjonalna koncepcja zbioru i przekonanie o jednorodności uniwersum zbiorów.

Słowa kluczowe: filozofia matematyki, wiedza i poznanie *a priori*, *tacit knowledge*, antynomia Russella, aksjomat komprehensji

Streszczenie

Russell's Antinomy and *a priori* Knowledge

The surprising fallibility of a priori knowledge is explained by the indication of the broad structure of hermeneutical horizon of intuitive and implicitly accepted intellectual convictions, i.e. the relevant *tacit knowledge*. Non-apodicticity of the results of *a priori* cognition cannot be used as an argument against the possibility and existence of the cognition. The analyses are based on the example of Russell's antinomy and the axiom of comprehension in set theory. The conviction of homogeneity of the universe of sets and extensional conception of a set are examples of presuppositions actively present during the historically given process of the creation of mathematics.

Key words: philosophy of mathematics, *a priori* knowledge, tacit knowledge, Russell's antinomy, axiom of comprehension