Edukacja Filozoficzna 66/2018
ISSN 0860-3839
DOI: 10.14394/edufil.2018.0025
ORCID: 0000-0002-9895-8449

# Obchody Światowego Dnia Logiki na Uniwersytecie Warszawskim

Arkadiusz Wójcik
(Uniwersytet Warszawski, Instytut Filozofii)

14 stycznia 2019 roku w Instytucie Filozofii UW odbyły się obchody Światowego Dnia Logiki. Tym samym Uniwersytet Warszawski dołączył do kilkudziesięciu innych uczelni z całego świata, na których tego dnia odbywały się spotkania mające na celu popularyzację logiki, zintegrowanie środowiska osób zajmujących się tą dyscypliną oraz zaznaczenie jej roli wśród innych dziedzin nauki, a także – szerzej – w życiu społecznym. Inicjatorem ustanowienia 14 stycznia jako daty celebrowania Światowego Dnia Logiki był prof. Jean-Yves Béziau z Uniwersytetu w Rio de Janeiro. Wybór takiego terminu nie był przypadkowy, dzień ten jest bowiem ściśle związany z dwoma najwybitniejszymi logikami XX wieku: Alfredem Tarskim, który urodził się 14 stycznia 1901 roku w Warszawie, i Kurtem Gödlem, który zmarł 14 stycznia 1978 roku w Princeton.

W trakcie krótkiego wystąpienia inauguracyjnego prof. Stanisław Krajewski podkreślił, że organizatorzy wydarzenia – dr Marcin Trepczyński, prof. Anna Wójtowicz, prof. Krzysztof Wójtowicz oraz on sam – podjęli decyzję o podzieleniu spotkania na dwie części. W pierwszej z nich odbyły się popularyzatorskie miniwykłady dotyczące bieżących problemów w logice. Była to okazja przede wszystkim do tego, by logicy związani z Instytutem Filozofii UW przedstawili zarys tematyki najważniejszych spośród prowadzonych przez siebie prac badawczych. Drugą część spotkania stanowił zaś wykład prof. Krajewskiego zatytułowany *Gödel a Tarski*.

Podczas pierwszego miniwykładu prof. Cezary Cieśliński, kierownik Zakładu Logiki w Instytucie Filozofii UW, zaprezentował najważniejsze założenia prowadzonych przez siebie i swoich współpracowników badań nad teoriami prawdy. Głównym celem wystąpienia było ulokowanie ich dociekań nad formalnymi teoriami prawdy w kontekście klasycznych prac Alfreda Tarskiego. W 1933 roku w rozprawie *Pojęcie prawdy w językach nauk dedukcyjnych* Tarski przedstawił słynną eksplikację pojęcia prawdy, a także udowodnił twierdzenie o niedefiniowalności, które w swobodnym sformułowaniu głosi, że predykat prawdy dla zdań danego języka nie może należeć do tego języka, co uzasadnia istotność rozróżnienia języka przedmiotowego i metajęzyka: predykat prawdy dla języka przedmiotowego jest istotnie metajęzykowy. Głównym osiągnięciem Tarskiego było pokazanie, że pojęcia prawdy można używać w sposób odpowiedzialny i bez wikłania się w antynomie, zachowując przy tym pewne kluczowe intuicje z nim związane.

Procedura zastosowana przez Tarskiego – rozwinięta w pracy *Arithmetical Extensions of Relational Systems* napisanej w 1956 roku wspólnie z Robertem L. Vaughtem – stanowi przykład teoriomodelowego ujęcia prawdy. Jego istota polega na precyzyjnym wprowadzeniu pojęcia modelu dla pewnego języka formalnego $L$, a następnie zdefiniowaniu relacji prawdziwości w modelu: dwuelementowej relacji między ustalonym modelem $M$ a określonym zdaniem języka $J$. Innym sposobem charakteryzowania pojęcia prawdy dla języków formalnych jest metoda aksjomatyczna. Sprowadza się ona do tego, że pewien wyjściowy język formalny $L$ zostaje rozszerzony do języka $L_T$ przez dodanie do $L$ jednoargumentowego predykatu prawdy $T(x)$, który interpretujemy jako: „$x$ jest zdaniem prawdziwym". Następnie wprowadzone zostają aksjomaty dla języka $L_T$, które mają pełnić funkcję postulatów znaczeniowych – aksjomaty zawierające predykat $T(x)$ łącznie konstytuują znaczenie pojęcia prawdy.

Należy podkreślić, że Tarski pozostał sceptyczny co do aksjomatycznego ujmowania prawdy. Uznał, że chociaż prowadzi ono do sformułowania niesprzecznych teorii, to jednak są one zbyt słabe, by oddawać pewne podstawowe własności związane z pojęciem prawdy, jak choćby to, że żadne zdanie nie jest jednocześnie prawdziwe i fałszywe. W swoim wystąpieniu prof. Cieśliński zwracał uwagę, że właśnie w tym punkcie badania prowadzone obecnie w Instytucie Filozofii UW pozostają w opozycji do podejścia reprezentowanego przez Tarskiego. Główny przedmiot zainteresowania prof. Cieślińskiego i jego współpracowników stanowią bowiem pewne naturalne aksjomatyczne teorie, które są silniejsze od teorii rozważanych przez Tarskiego i dzięki temu pozwalają na uchwycenie wielu kluczowych intuicji związanych z pojęciem prawdy.

W trakcie drugiego wystąpienia dr Mateusz Łełyk kontynuował temat formalnych studiów nad pojęciem prawdy i przedstawił więcej szczegółów technicznych dotyczących badań nad teoriami aksjomatycznymi. Punktem wyjścia takich badań jest przyjęcie pewnej teorii bazowej B, od której wymaga się jedynie tego, by była w stanie wyrazić i udowodnić podstawowe fakty dotyczące składni. Zazwyczaj jako teorię bazową przyjmuje się arytmetykę Giuseppe Peana (w skrócie: PA). Do języka teorii B dodajemy jednoargumentowy predykat prawdy $T(x)$ i rozszerzamy aksjomatykę teorii B o nowe aksjomaty. Aksjomaty te mają się odnosić do różnych intuicji związanych z pojęciem prawdy. Zachodzenie jednego z najprostszych warunków, które możemy nałożyć na predykat prawdy, gwarantuje przyjęcie aksjomatów postaci

$$\mathrm{T}(\ulcorner\varphi\urcorner) \equiv \varphi,$$

gdzie φ jest dowolnym zdaniem z teorii B. Aksjomaty te wyrażają to, że predykat prawdy spełnia równoważności Tarskiego dla języka teorii B. Rozszerzenie PA o powyższe równoważności oznaczamy jako $\mathrm{TB}^-$. Inną własnością, której posiadania możemy oczekiwać od predykatu prawdy, jest kompozycyjność. Przesądza ona o tym, że prawdziwość zdania złożonego jest funkcją prawdziwości zdań prostszych. Kompozycyjność teorii prawdy jest zagwarantowana przez przyjęcie odpowiednich aksjomatów, które stanowią precyzyjną formalizację takich zasad, jak np.:

> Dla dowolnych zdań φ i ψ z języka teorii B: koniunkcja φ i ψ jest prawdziwa zawsze i tylko wtedy, gdy prawdziwe są oba jej człony.

Rozszerzenie PA o aksjomaty kompozycyjne oznaczamy jako $\mathrm{CT}^-$. Teorie $\mathrm{TB}^-$ oraz $\mathrm{CT}^-$ z dodanym schematem indukcji dla zdań zawierających predykat prawdy oznaczamy odpowiednio jako TB oraz CT. W swoim wystąpieniu dr Łełyk podkreślił, że jednym z najbardziej interesujących pytań dotyczących formalnych teorii prawdy jest pytanie o konserwatywność danej teorii nad teorią bazową, czyli nad PA. Gdy dane są dwie teorie $\mathrm{Th}_1$ i $\mathrm{Th}_2$, takie, że $\mathrm{Th}_1 \subseteq \mathrm{Th}_2$, oraz istnieje takie zdanie języka teorii $\mathrm{Th}_1$, którego dowodzi $\mathrm{Th}_2$, ale nie dowodzi $\mathrm{Th}_1$, wówczas mówimy, że $\mathrm{Th}_2$ jest niekonserwatywna nad $\mathrm{Th}_1$. W przeciwnym zaś przypadku mówimy, że $\mathrm{Th}_2$ jest konserwatywna nad $\mathrm{Th}_1$. Teorie konserwatywne nad PA nie dowodzą więc żadnych zdań arytmetycznych, których nie udowodniłaby już sama teoria PA, natomiast teorie niekonserwatywne pozwalają na dowodzenie takich zdań. Wiadomo, że $\mathrm{TB}^-$ i TB są teoriami konserwatywnymi nad

PA. Wiadomo również, że $CT^{-}$ jest konserwatywna nad PA, podczas gdy CT jest teorią niekonserwatywną nad PA. Ali Enayat zaproponował określenie granicy oddzielającej konserwatywne i niekonserwatywne teorie prawdy zawarte pomiędzy $CT^{-}$ a CT mianem „granicy Tarskiego". Jednym z głównych celów badań prowadzonych obecnie w Zakładzie Logiki jest więc odpowiedź na pytanie: jak przebiega granica Tarskiego i jakie własności predykatu prawdy odpowiadają za to, że dana teoria może przekroczyć tę granicę?

W czasie kolejnego wystąpienia dr Dariusz Kalociński opowiedział o badaniach nad predykcją prowadzonych wspólnie z mgr. Tomaszem Steiferem z Instytutu Podstawowych Problemów Techniki Polskiej Akademii Nauk. Z predykcją mamy do czynienia wówczas, gdy na podstawie skończonej liczby obserwacji dotyczących pewnego procesu próbujemy przewidzieć to, co się stanie za chwilę, czyli jaki będzie rezultat kolejnej obserwacji. Głównym przedmiotem zainteresowania dr. Kalocińskiego są procesy stochastyczne, które polegają na generowaniu ciągów binarnych. Przez predykcję rozumie się tu działanie pewnej całkowitej obliczalnej funkcji, przyjmującej jako argument słowo binarne i zwracającej 0 lub 1. Predyktor otrzymuje więc na wejściu $n$–1 pierwszych bitów pewnego ciągu i na ich podstawie przewiduje to, jaki będzie $n$-ty bit. Ponadto dr Kalociński zdefiniował pojęcia błędu predykcji oraz optymalności predyktora, a także zarysował możliwości zastosowań wprowadzonego formalizmu w teorii informacji, statystyce oraz w algorytmicznej teorii losowości.

Czwarty miniwykład, zatytułowany *Problemy z definicją hazardu*, wygłosiła prof. Anna Wójtowicz. Celem jej wystąpienia było doprecyzowanie pojęcia gry hazardowej. Na podstawie analizy różnych aktów prawnych można przyjąć, że standardowa definicja gier hazardowych głosi, iż są to gry o wygrane pieniężne lub rzeczowe, których wynik w szczególności zależy od przypadku. Ponieważ zakwalifikowanie danej gry do kategorii hazardu niesie za sobą różne konsekwencje prawne – m.in. ograniczenia co do miejsc, w których gra może być rozgrywana, a także ustalenie wysokości podatku odprowadzanego od wygranej – istotne wydaje się doprecyzowanie występującego w standardowej definicji zwrotu „wynik gry w szczególności zależy od przypadku".

Na gruncie prawa brytyjskiego przyjmuje się, że wystarczy jakikolwiek element losowości, aby uznać, że wynik gry zależy od przypadku. Takie rozstrzygnięcie wydaje się jednak niezadowalające, ponieważ przesądza o tym, że za grę hazardową można uznać np. brydża. Prawo obowiązujące w Stanach Zjednoczonych zakłada natomiast, że element losowy musi mieć dominujący wpływ na wynik danej gry. Pojęcie dominującego wpływu na wynik gry wciąż pozostaje jednak pojęciem nieostrym, czego skutkiem są m.in. toczące się przed sądami USA spory o to, czy poker zalicza się do gier hazardowych.

Celem prof. Wójtowicz było badanie konsekwencji pewnej naturalnej operacjonalizacji terminu „dominujący wpływ czynnika losowego na wynik gry", a tym samym przybliżenie się do sformułowania adekwatnej definicji gry hazardowej. Aby rozstrzygnąć, co ma decydujący wpływ na wynik danej gry, powinniśmy odwołać się do analizy struktury wyników osiąganych w niej przez realnych graczy. Współcześnie da się to zrobić z wykorzystaniem materiału empirycznego, np. dostępnych on-line zapisów przebiegu rozgrywek. Na podstawie takich danych możemy ustalić ranking graczy, który ma stanowić odpowiednik miary ich umiejętności, a następnie wyróżnić graczy z rankingiem maksymalnym ($G_{max}$) i minimalnym ($G_{min}$). Żeby dobrze opisać element losowości, wprowadzamy relatywizację wygranej do określonej sytuacji s i badamy wartość $P(G_i >s\ G_k)$, czyli wartość prawdopodobieństwa wygranej gracza $G_i$ nad graczem $G_k$ w sytuacji s. Jeśli w danej grze istnieje tyle samo takich sytuacji, że $P(G_{max} >s\ G_{min}) = 1$, i takich, że $P(G_{max} >s\ G_{min}) = 0{,}5$, wówczas uznajemy, że istnieje równowaga między wpływem losowości i wpływem umiejętności na wynik.

Jako przykład rozważmy grę szachy/moneta, która polega na tym, że najpierw rzucamy symetryczną monetą i jeśli wypadnie orzeł, to gramy w szachy (wówczas $P(G_{max} >s\ G_{min}) = 1$), a jeśli reszka – w monetę (wówczas $P(G_{max} >s\ G_{min}) = 0{,}5$). Graniczna wartość oczekiwana wyniku takiej gry wynosi oczywiście 0,75. Na tej podstawie prof. Wójtowicz sformułowała następujące prowizoryczne kryterium: każda gra, w której wartość oczekiwana wygranej gracza najlepszego z graczem najgorszym jest mniejsza niż 0,75, jest grą o przewadze elementu losowego.

Podstawowy problem polega jednak na tym, że kryterium szachy/moneta formalizuje wyłącznie intuicję zliczania sytuacji: tych, w których umiejętności zapewniają wygraną, a także takich, w których umiejętności nie wpływają na zwycięstwo. Nie stanowi to niestety dobrego kryterium oceny gier, w których istotne są kwoty wygranych, nie zaś liczba wygranych. Przykładem takiej gry jest właśnie poker: nie ma znaczenia, ile razy dany gracz odniósł zwycięstwo, lecz liczy się to, jaką kwotę wygrał. Przy ocenie relacji umiejętności i czynników losowych charakteryzującej daną grę powinno się brać pod uwagę wszystkie umiejętności, które wpływają na wysokość kwoty wygranej, a więc nie tylko umiejętności zwiększające szanse na wygraną, lecz także umiejętności rozpoznawania sytuacji, w których mamy większą szansę na wygraną, oraz umiejętność postawienia stawki adekwatnej do szans wygranej. Kryterium szachy/moneta nie spełnia tego warunku. Prof. Wójtowicz zakończyła więc swoje wystąpienie konkluzją, że znalezienie kryterium pozwalającego na ustalenie, czy w danej grze umiejętności przeważają nad elementem losowym, pozostaje problemem interesującym i otwartym.

W kolejnym miniwykładzie prof. Krzysztof Wójtowicz skupił się na pytaniu o istnienie matematycznych i logicznych wyjaśnień pewnych zjawisk fizycznych. Nie ulega wątpliwości, że przy wyjaśnianiu faktów fizycznych odwołujemy się do teorii naukowych sformułowanych z użyciem pojęć matematycznych. Interesujące jest jednak to, czy istnieją zjawiska fizykalne, w których wyjaśnianiu matematyka nie tylko pełni funkcję środka wyrażeniowego, lecz także jej twierdzenia stanowią istotny – a być może jedyny – element eksplanansa. Podczas swojego wystąpienia prof. Wójtowicz wskazał kilka zjawisk fizycznych, które mogłyby stanowić uzasadnienie dla twierdzącej odpowiedzi na tak postawione pytanie. Jednym z omawianych przez niego przykładów był tzw. problem mostów królewieckich. Otóż przez miasto Królewiec przepływała rzeka, w której rozwidleniach znajdowały się dwie wyspy. Ponad rzeką zbudowano siedem mostów, z których jeden łączył obie wyspy, a pozostałe – wyspy z brzegami rzeki. W XVIII wieku szwajcarski matematyk Leonhard Euler zainteresował się tym, czy można przejść kolejno przez wszystkie królewieckie mosty w taki sposób, by każdy z nich przekroczyć tylko raz. Euler udowodnił, że jest to niemożliwe, a jego pracę na ten temat uznaje się za pierwsze dzieło z zakresu teorii grafów.

Innym z rozważanych przykładów była kwestia optymalnego upakowania kul, a dokładnie – wyjaśnienie tego, dlaczego przy układaniu jednakowych kul zawsze pozostaje co najmniej około 26% wolnej przestrzeni. Wyjaśniając ten fakt, można się odwołać do hipotezy Keplera – udowodnionej przez Thomasa Halesa dopiero pod koniec XX wieku z wykorzystaniem obliczeń komputerowych – zgodnie z którą najbardziej efektywny sposób upakowania stanowi naturalne ułożenie: kule w najniższej warstwie układa się tak, by odcinki łączące ich środki tworzyły sieć jednakowych trójkątów równobocznych, następnie na to nakłada się drugą warstwę, umieszczając kule w zagłębieniach pierwszej, i tak dalej.

Analiza tego typu przykładów prowadzi do sformułowania interesujących pytań z zakresu filozofii matematyki. Czy te wyjaśnienia faktycznie są wyjaśnieniami, a jeśli tak – czy są to wyjaśnienia matematyczne? Co może stanowić kryterium matematyczności wyjaśnienia? Czy spójne jest stanowisko, w myśl którego matematyka jest wprawdzie niezbędna do wyrażania pewnych tez, ale pozostaje jedynie środkiem wyrażeniowym? Prof. Wójtowicz zauważył ponadto, że analogiczne rozważania można prowadzić także w odniesieniu do pewnych wyjaśnień logicznych. Naturalne wydaje się powiedzenie, że przyczyną tego, iż nigdy nie zaobserwowaliśmy, by w danym punkcie czasoprzestrzennym jednocześnie zachodziło i nie zachodziło określone zjawisko, jest odwołanie się do prawa logiki klasycznej: prawa sprzeczności. Podobnie naturalnym wytłumaczeniem tego, że żaden komputer nie wyprodukował dotąd dowodu sprzeczności w ramach arytmetyki Peana, jest powołanie się na fakt niesprzeczności PA. Analiza statusu tego typu wyjaśnień stanowi interesujące zagadnienie z zakresu filozofii logiki.

Ostatnim punktem obchodów był wykład prof. Stanisława Krajewskiego zatytułowany *Gödel a Tarski*, poświęcony patronom Światowego Dnia Logiki. Chociaż Tarski był o pięć lat starszy od Gödla i zaczął publikować kilka lat przed nim, ci dwaj logicy zasadniczo działali równocześnie, utrzymując przy tym życzliwe kontakty osobiste. W swoich pracach Tarski regularnie powoływał się na Gödla i wielokrotnie podkreślał, jak ważne było dla niego zapoznanie się z wynikami uzyskanymi przez austriackiego logika. Z drugiej jednak strony w pracach Gödla poza nielicznymi wyjątkami nie znajdziemy odwołań do rezultatów otrzymanych przez autora *Pojęcia prawdy w językach nauk dedukcyjnych*. Asymetria ta może się wydawać zagadkowa i stanowiła dotąd przedmiot licznych spekulacji.

Głównym celem wykładu było omówienie możliwych przyczyn milczenia Gödla. Prof. Krajewski skupił się najpierw na krytyce niektórych hipotez wysuwanych dotychczas w literaturze. Jak wiadomo, Tarski sformułował definicję prawdziwości za pomocą pojęcia spełniania. Gödel używał tego pojęcia dla formuł arytmetycznych i teoriomnogościowych w sposób intuicyjny, bez podawania definicji, podobnie jak wszyscy jego poprzednicy. Niektórzy skłonni są sądzić, że Gödel uważał takie intuicyjne podejście za wystarczające (stąd ignorowanie wyników polskiego logika). Prof. Krajewski zauważył jednak, że takie wytłumaczenie nie jest przekonujące, ponieważ pojęcie spełniania mogło być niezwykle przydatne w badaniach prowadzonych przez Gödla, w szczególności przy definiowaniu zbiorów konstruowalnych i zbiorów definiowalnych z liczb porządkowych oraz przy interpretacji rozgałęzionej teorii typów.

Innym niewystarczającym wytłumaczeniem ignorowania wyników uzyskanych przez Tarskiego jest odwołanie się do osobowości Gödla oraz nastrojów dominujących w jego otoczeniu naukowym. Niektórzy – jak choćby znany biograf austriackiego logika, Solomon Feferman – twierdzą bowiem, że Gödla cechowała szczególna ostrożność, co w połączeniu z tym, że w środowisku pozytywistów logicznych z Koła Wiedeńskiego, w którym funkcjonował do czasu emigracji do Stanów Zjednoczonych, panowała niechęć do metafizycznych i niefinitystycznych terminów jak „prawda", wyjaśnia milczenie tego naukowca. Takie wytłumaczenie nie uwzględnia jednak tego, że w Wiedniu Gödel szybko uzyskał pozycję i zdobył sławę, które dawały mu absolutną niezależność. Tym bardziej po przeprowadzce do Ameryki nie był w żaden sposób zależny od niemieckiego establishmentu uniwersyteckiego, a w USA kluczową rolę w kształtowaniu badań logicznych odgrywał właśnie Tarski.

Zdaniem prof. Krajewskiego możliwych źródeł milczenia Gödla należy się doszukiwać przede wszystkim w jego poglądach filozoficznych, wśród których szczególną uwagę powinno się zwrócić na: (i) przekonanie, że koncepcja semantyczna nie daje wystarczającego ugruntowania matematyki; (ii) uznanie prawdy nie za pojęcie, lecz za niewyczerpalną ideę w sensie Kanta, co powoduje sceptycyzm, jeśli chodzi o możliwość odkrycia istoty prawdy w ramach programu semantycznego, który zainicjował Tarski; (iii) rozumienie logiki jako języka uniwersalnego w przeciwieństwie do rozumienia logiki jako rachunku mającego wiele interpretacji, co powodowało niechęć do badań teoriomodelowych; (iv) uznanie filozoficznej nieistotności wyników formalnych, takich jak np. twierdzenie o niedefiniowalności prawdy. Wykład zakończył się obserwacją, że choć sama zagadka milczenia Gödla pozostała co do zasady niewyjaśniona, to jednak problem ten dotyka najpoważniejszych kwestii w filozofii logiki.

Reasumując, podczas pierwszych obchodów Światowego Dnia Logiki na Uniwersytecie Warszawskim skupiono się na popularyzacji badań prowadzonych obecnie przez pracowników Zakładu Logiki. Po zakończeniu części oficjalnej dyskusja przeniosła się do kuluarów. Prowadzone tam rozmowy ujawniły, że szczególne zainteresowanie słuchaczy wzbudziła kwestia filozoficznej istotności wyników formalnych badań nad teoriami prawdy.