EDUKACJA FILOZOFICZNA
Vol. 51 2011

POLEMIKI I DYSKUSJE

MARCIN DROFISZYN
Uniwersytet Wrocławski

O PEWNEJ LOGICE POWINNOŚCI

0. Wstęp. Naszym zadaniem jest zbadanie systemu logiki powinności LP[1]. Co jest, a co nie twierdzeniem LP i czy to, czego dowiadujemy się o formalnej strukturze pojęcia powinności utrafia w nasze intuicje etyczne. Dalej, czy system LP jest pełny, a jeśli tak, to względem jakiej klasy modeli. Wreszcie czy system ten da się przedstawić jako fragment logiki aletycznej. W zakończeniu zarysujemy koncepcje opisu semantycznego dla multimodalnego systemu logicznego pozwalającego formalizować wzajemne związki między pojęciami bycia powinnym i wartościowym (*resp.* dobrym).

I. Logika powinności LP. Na słownik języka J składają się: zmienne zdaniowe p, q, r..., spójniki negacji oraz implikacji materialnej, nawiasy jako symbole pomocnicze oraz jednoargumentowe operatory modalne O i P dla oznaczenia – kolejno – pojęcia powinności i dopuszczalności.

Zbiór formuł poprawnie zbudowanych języka J to najmniejszy zbiór F spełniający warunki:

(i) $p, q, r\ldots \in F$

(ii) jeśli $A, B \in F$, to $\sim A$, $A \to B$, OA, $PA \in F$

Pozostałe spójniki KRZ wprowadzamy jako skróty definicyjne w standardowy sposób.

Aksjomatami LP są:

(A0) Wszystkie tautologie KRZ,

(A1) $O(p \to q) \to Op \to Oq$,

[1] M. Magdziak: *Modalności aksjologiczne*, w: R. Zaborowski (red.): *Człowiek wobec wartości w filozofii Henryka Elzenberga*. Warszawa 1998, s. 147-156.

(A2) $Op \wedge Oq \rightarrow O(p \wedge q)$,

(A3) $O(p \wedge q) \rightarrow Op \vee Oq$,

(A4) $\sim O(p \vee \sim p)$,

(A5) $\sim O(p \wedge \sim p)$.

Zbiór tez (twierdzeń) LP to najmniejszy zbiór zawierający aksjomaty oraz domknięty na następujące reguły inferencyjne:

(R1) Regułę odrywania,

(R2) Regułę podstawiania,

(R3) Regułę wzajemnego zastępowania wyrażeń definicyjnie równoważnych,

(R4) Regułę ekstensjonalności $A \equiv B / OA \equiv OB$.

Definicja (wyprowadzalność) Formuła A jest wyprowadzalna ze zbioru formuł K w systemie LP, symbolicznie LP, $K \vdash A$, wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki skończony podzbiór K, $B_1, B_2, \ldots B_n$, że formuła $(B_1 \wedge B_2 \wedge \ldots \wedge B_n) \rightarrow A$ jest tezą logiki LP.

Definicja (niesprzeczność) Zbiór formuł K jest niesprzeczny jeśli nie istnieje taka formuła A, że zarówno A jak i $\sim A$ jest wyprowadzalne z K.

Nietrudno pokazać że zbiór tez systemu LP jest niesprzeczny.

II. Twierdzenia systemu LP. System LP wydaje się z kilku powodów być właściwym systemem do formalnych analiz pojęcia powinności. Po pierwsze, brak reguł ukonieczniania i regularności powoduje, że nie można w jego ramach odtworzyć znanych paradoksów logiki deontycznej. Mianowicie, paradoks dobrego samarytanina – formuła $O\sim p \rightarrow O(p \rightarrow q)$ nie jest twierdzeniem LP oraz paradoks Alfa Rossa, gdyż brak jako twierdzenia formuły $Op \rightarrow O(p \vee q)$.

Po drugie, twierdzeniem LP jest ważne dla wszelkiego rodzaju logik powinności twierdzenie (T3)[2], $Op \rightarrow \sim O\sim p$, zwane formułą D. Jest on równoważny na gruncie logiki aletycznej warunkowi niesprzeczności kodeksu norm (*resp.* nie wszystko jest powinne) oraz zasadzie Kanta (co

[2] Numeracja twierdzeń pochodzi z oryginalnej pracy.

jest powinne, jest możliwe). Wyklucza również jako twierdzenia niepożądane na gruncie logiki deontycznej zasady ($Op \rightarrow p$) oraz ($p \rightarrow Pp$).

Twierdzenie (T3) oraz aksjomat (A2) bywają krytykowane na gruncie filozofii moralnej przez zwolenników stanowiska przyjmującego istnienie dylematów moralnych. Otóż dzięki nim, na gruncie LP, można wykazać, że już w samej naturze dylematu moralnego tkwi sprzeczność. Przedstawimy to rozumowanie, czym przy okazji chcemy zobrazować skuteczność systemu LP w analizach istotnych problemów filozofii moralnej.

Zacznijmy od sformułowania pojęcia dylematu. Na standardową definicję składają się trzy warunki:

(i) kolizja powinności (obowiązki nie przewyższają się nawzajem),

(ii) poczucie bezsilności i niezdecydowanie działającego,

(iii) poczucie winy w przypadku wyboru jednaj opcji na niekorzyść drugiej.

Spróbujmy je sformalizować w języku J:

(i*) Op, Oq,

(ii*) subiektywne uwarunkowania podmiotu wynikające z (i) i (iii),

(iii*) poczucie winy podpowiada, że zrealizowanie jednego ze stanów rzeczy powinnych przekłada się na naruszenie drugiego. I właśnie ze względu na tą niemożność pozostania w zgodzie z „moralnością” koniunkcji stanów rzeczy p i q zapisujemy (iii) raczej jako

$$\sim P(p \wedge q),$$

aniżeli, jak ma to czasem miejsce w literaturze[3], czyli jako

$$\sim \Diamond(p \wedge q),$$

gdyż ta ostatnia formuła, naszym zdaniem, podkreśla raczej wykluczanie się logiczne stanów rzeczy.

Warunki te prowadzą do sprzeczności. Mianowicie, załóżmy że Op, Oq i $\sim P(p \wedge q)$, lub równoważnie $O\sim(p \wedge q)$. Korzystając z aksjomatu (A2), $Op \wedge Oq \rightarrow O(p \wedge q)$, oraz z założeń Op i Oq, na mocy reguły odrywania, otrzymujemy $O(p \wedge q)$. Ten wniosek jest poprzednikiem w

[3] T. C. McConnell: *Moral Dilemmas and Consistency in Ethics*, w: *Moral Dilemmas*, C. W. Gowans (ed.). New York-Oxford 1987, s. 155.

(T3), $O(p \wedge q) \rightarrow \sim O\sim(p \wedge q)$. Odrywając otrzymujemy następnik, który jest sprzeczny z założeniem $O\sim(p \wedge q)$.

Jak widać w rozumowaniu tym oprócz formuły D interweniował aksjomat (A2), zwany zasadą aglomeracji lub sklejania. Nie jest jednak niezbędny w tym rozumowaniu, gdyż może zostać zastąpiony twierdzeniem (T6)[4]:

$$Op \wedge \sim P(p \wedge q) \rightarrow O\sim q,$$

które jest prostym następstwem (A1), zwanego formułą K albo aksjomatem regularności. Mianowicie, korzystając z założeń i reguły odrywania do (T6) otrzymujemy $O\sim q$. Podobnie, korzystając z założenia Oq i (T3), na mocy reguły odrywania, otrzymujemy $\sim O\sim q$, co znów daje sprzeczność.

III. Pełność LP. Ponieważ LP jest logiką słabszą od logik normalnych, dlatego w celu zbadania pełności LP nie możemy posłużyć się zwykłą semantyką relacyjną. W szczególności „mocniejsza" wersja aksjomatu (A3) jest spełniona we wszystkich strukturach relacyjnych tj. $O(p \wedge q) \rightarrow Op \wedge Oq$. Posłużymy się więc semantyką otoczeń (inaczej zwaną semantyką minimalną czy sąsiedztwa).

Definicja (model otoczeniowy) Modelem otoczeniowym języka J nazywamy trójkę uporządkowaną $M = \langle U, N, V \rangle$, gdzie U jest niepustym zbiorem światów możliwych, N jest funkcją przyporządkowującą każdemu elementowi zbioru U pewien zbiór podzbiorów U, zwanych otoczeniami u, a V jest funkcją wartościowania, która zmiennym zdaniowym przyporządkowuje podzbiory zbioru U.

Definicja (spełnianie) Pojęcie spełnianie formuły A w modelu M, świecie u, w skrócie $(M, u) \models A$, definiujemy indukcyjnie ze względu na możliwą budowę formuły A:

(i) $(M, u) \models p$ wtw, gdy $u \in V(p)$,

(ii) $(M, u) \models \sim B$ wtw, gdy nieprawda, że $(M, u) \models B$,

---

[4] Zauważmy, że jest to pewna wersja „zasady Elzenberga", którą formułuje B. Wolniewicz (zob. B. Wolniewicz: *Myśl Elzenberga*. „Studia Filozoficzne" 12, 1986, s. 64.

(iii) (M, u) $\models$ B $\rightarrow$ C wtw, gdy jeśli (M, u) $\models$ B, to (M, u) $\models$ C,

(iv) (M, u) $\models$ OB wtw, gdy $\exists X(X \in N(u) \wedge X = \{v \in U: (M, v) \models B\})$,

(v) (M, u) $\models$ PB wtw, gdy $\sim\exists X(X \in N(u) \wedge X = \{v \in U: (M, v) \models \sim B\})$.

Wprowadzając skrót definicyjny $[A]^M = \{v \in U: (M, v) \models A\}$, warunki (iv) i (v) możemy zapisać odpowiednio (M, u) $\models$ OB wtw, gdy $[B]^M \in N(u)$ i (M, u) $\models$ PB wtw, gdy $[B]'^{M} \notin N(u)$.

Mówimy, że formuła A jest spełniona w modelu M, symbolicznie M $\models$ A, wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $u \in U$ mamy (M, u) $\models$ A. Natomiast dowolny zbiór formuł K jest spełniony w modelu M wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej formuły $A \in K$ i dowolnego świata $u \in U$ jest tak, że (M, u) $\models$ A.

Dla dowolnego świata u oraz zbiorów światów X i Y modelu M przyjmijmy następujące warunki dla funkcji N:

(W1) jeśli $X \in N(u)$ i $X' \cup Y \in N(u)$, to $Y \in N(u)$,

(W2) jeśli $X \in N(u)$ i $Y \in N(u)$, to $X \cap Y \in N(u)$,

(W3) jeśli $X \cap Y \in N(u)$, to $X \in N(u)$ lub $Y \in N(u)$,

(W4) $U \notin N(u)$,

(W5) $\varnothing \notin N(u)$.

Warunki te wyrażają pewne intuicje dotyczące powinności. Jeśli uznać podzbiory W za odpowiedniki sytuacji (X i X' to sytuacje sprzeczne, $X \cap Y$ to przekrój sytuacji X i Y itd.), to warunek (W1) możemy odczytać zgodnie z pewną wersją zasady Elzenberga, mianowicie, że jeśli jakaś sytuacja X jest powinna i powinna jest sytuacja sprzeczna z koniunkcją (przekrojem) sytuacji X oraz pewnej sytuacji Y, to powinna jest sytuacja sprzeczna z sytuacją Y. Warunek (W2) wyraża intuicję, że powinność ma własność łączenia się – sytuacje powinne osobno są powinne razem. Nie musi być jednak na odwrót, o czym poucza warunek

(W3). Wreszcie warunki (W4) i (W5) wyrażają myśl, że powinność jest poza logiką. Tautologiczne i kontrtautologiczne sytuacje nie są powinne.

Twierdzenie 1 System LP jest spełniony w każdym modelu M spełniającym warunki (W1) – (W5).

Dowód. Dowód będzie przebiegać indukcyjnie ze względu na możliwą długość dowodu twierdzenia A. Niech M = <U, N, V> będzie dowolnie ustalonym modelem otoczeniowym spełniającym warunki (W1) – (W5) i niech $u \in U$.

(i) A jest aksjomatem LP.

(A0) Oczywiście tautologie klasycznego rachunku zdań są spełnione w każdym modelu otoczeniowym.

(A1) Załóżmy, że $(M, u) \models O(p \rightarrow q)$ oraz $(M, u) \models Op$. Wykażemy, że $(M, u) \models Oq$. Na mocy definicji spełniania założenie jest równoważne $[p]'^M \cup [q]^M \in N(u)$ oraz $[p]^M \in N(u)$. Ponieważ model M spełnia warunek (W1), zatem $[q]^M \in N(u)$, co daje $(M, u) \models Oq$.

(A2) Załóżmy, że $(M, u) \models Op \wedge Oq$. Pokażemy $(M, u) \models O(p \wedge q)$. Na mocy definicji spełniania założenie jest równoważne $[p]^M \in N(u)$ i $[q]^M \in N(u)$. Ponieważ model M spełnia warunek (W2), zatem jego struktury otoczeniowe są domknięte na przekroje. Tak więc $[p]^M \cap [q]^M \in N(u)$ i stąd $[p \wedge q]^M \in N(u)$, co daje $(M, u) \models O(p \wedge q)$.

(A3) Załóżmy, że $(M, u) \models O(p \wedge q)$. Pokażemy $(M, u) \models Op \vee Oq$. Na mocy definicji spełniania założenie jest równoważne $[p \wedge q]^M \in N(u)$, czyli $[p]^M \cap [q]^M \in N(u)$. Ponieważ model M spełnia warunek (W3), zatem jego struktury otoczeniowe są domknięte na „częściowe" rozszerzanie. Tak więc $[p]^M \in N(u)$ lub $[q]^M \in N(u)$, co daje $(M, u) \models Op \vee Oq$.

(A4) Pokażemy, że $(M, u) \not\models O(p \vee \sim p)$. Załóżmy nie wprost, że $(M, u) \models O(p \vee \sim p)$. Stąd, na mody definicji spełniania, mamy $[p \vee \sim p]^M \in N(u)$, co jest równoważne $[p]^M \cup [p]'^M \in N(u)$. Ponieważ $[p]^M \cup [p]'^M$

$= U$, więc $U \in N(u)$. Z drugiej strony model M spełnia warunek (W4), czyli $U \notin N(u)$, co daje sprzeczność. Zatem $(M, u) \nvDash O(p \wedge \sim p)$.

(A5) Pokażemy, że $(M, u) \nvDash O(p \wedge \sim p)$. Załóżmy nie wprost, że $(M, u) \vDash O(p \wedge \sim p)$. Stąd, na mody definicji spełniania, mamy $[p \wedge \sim p]^M \in N(u)$, co jest równoważne $[p]^M \cap [p]^{\setminus M} \in N(u)$. Ponieważ $[p]^M \cap [p]^{\setminus M} = \varnothing$, więc $\varnothing \in N(u)$. Z drugiej strony model M spełnia warunek (W5), czyli $\varnothing \notin N(u)$, co daje sprzeczność. Zatem $(M, u) \nvDash O(p \wedge \sim p)$.

(ii) A powstało przez zastosowanie reguł inferencji do twierdzeń LP. Przypadki, gdy A powstało przez zastosowanie reguł (R1) i (R2) pomijamy jako znane w literaturze[5]. Ponieważ (R3) można uznać za regułę wtórną w naszym systemie modalnym zawierającym regułę (R4)[6], więc pozostaje rozpatrzyć przypadek reguły (R4). Załóżmy, że dla dowolnie ustalonego $M = <U, N, V>$ i świata $u \in U$, $(M, u) \vDash B \equiv C$. Pokażemy stąd $(M, u) \vDash OB \equiv OC$. Z założenia wynika, że $[B]^M = [C]^M$. Tak więc, jeśli $(M, u) \vDash OB$, wówczas, z definicji spełniania, $[B]^M \in N(u)$; co jest równoważne $[C]^M \in N(u)$, czyli $(M, u) \vDash OC$.

Dzięki powyższemu twierdzeniu otrzymaliśmy pierwszą implikację potrzebną do dowodu pełności systemu LP. Mianowicie, ustaliliśmy, że jeśli $LP \vdash A$, to dla dowolnie ustalonego M, $M \vDash A$. W celu ustalenia implikacji odwrotnej, tj. jeśli dla dowolnie ustalonego M, $M \vDash A$, to $LP \vdash A$, posłużymy się tzw. otoczeniowymi modelami kanonicznymi.

Definicja (otoczeniowy model kanoniczny) Modelem kanonicznym nazywamy trójkę uporządkowaną $M_L = <U_L, N_L, V_L>$, gdzie U_L jest zbiorem wszystkich zupełnych i niesprzecznych rozszerzeń Lindenbauma systemu LP. Ponieważ zbiór tez LP jest niesprzeczny rozszerze-

[5] Zob. np. G. E. Hughes, M. J. Cresswell: *A new introduction to modal logic*. London-New York 1998, s. 41.

[6] Zob. N. B. Cocchiarella, N. A. Freund: *Modal logic. An introduction to its syntax and semantics*. Oxford-New York, 2008, s. 19.

nia takie istnieją. N_L jest funkcją zadaną na elementach U_L taką, że dla dowolnego $u \in U_L$

$N_L(u) = \{X \subseteq U_L$: dla pewnej formuły A, $OA \in u$ i $X = [A]^{ML}$ },
przy czym

$[A]^{ML} = \{v \in U_L: A \in v\}$.

Natomiast V_L jest wartościowaniem, które dla dowolnej zmiennej zdaniowej p przyjmuje wartość $V_L(p) = [p]^{ML}$.

Twierdzenie 2 Model kanoniczny M_L spełnia warunki (W1) – (W5).

Dowód. (W1) Załóżmy, że $X' \cup Y \in N_L(u)$ i $X \in N_L(u)$. Stąd, istnieją takie formuły A i B, że $O(A \rightarrow B) \in u$ i $OA \in u$ oraz $[A]^{ML} = X$, $[B]^{ML} = Y$. Ponieważ u jest zupełnym i niesprzecznym rozszerzeniem systemu LP, zatem zawiera każde podstawienie formuły $O(p \rightarrow q) \rightarrow Op \rightarrow Oq$ oraz jest domknięty na regułę odrywania. Stosując dwukrotnie tą regułę otrzymujemy $OB \in u$ i stąd, na mocy definicji N_L, mamy $[B]^{ML} \in N_L(u)$.

(W2) Załóżmy, że $X \in N_L(u)$ oraz $Y \in N_L(u)$. Stąd istnieją takie formuły A i B, że $OA \in u$ i $OB \in u$ oraz $[A]^{ML} = X$ i $[B]^{ML} = Y$. Ponieważ u jest zupełnym i niesprzecznym rozszerzeniem systemu LP, więc zawiera każde podstawienie formuły $Op \wedge Oq \rightarrow O(p \wedge q)$ oraz jest domknięty na regułę odrywania. Stąd $O(A \wedge B) \in u$. Zatem, na mocy definicji N_L, mamy $[A \wedge B]^{ML} \in N_L(u)$, czyli $[A]^{ML} \cap [B]^{ML} \in N_L(u)$, tak więc $X \cap Y \in N_L(u)$.

(W3) Załóżmy, że $X \cap Y \in N_L(u)$. Stąd istnieje taka formuła $A \wedge B$, że $O(A \wedge B) \in u$ oraz $[A \wedge B]^{ML} = X \cap Y$. Ponieważ u jest zupełnym i niesprzecznym rozszerzeniem systemu LP, więc zawiera każde podstawienie formuły $O(p \wedge q) \rightarrow Op \vee Oq$ oraz jest domknięty na regułę odrywania. Stąd $OA \vee OB \in u$, i równoważnie: $OA \in u$ lub $OB \in u$. Na mocy definicji N_L mamy zatem $[A]^{ML} \in N_L(u)$ lub $[B]^{ML} \in N_L(u)$, tak więc $X \in N_L(u)$ lub $Y \in N_L(u)$.

(W4) Załóżmy nie wprost, że $U_L \in N_L(u)$. Zatem istnieje formuła A, że $OA \in u$ oraz $[A]^{ML} = U_L$. Ponieważ u jest zupełnym i niesprzecznym rozszerzeniem systemu LP, zatem $\sim O(p \vee \sim p) \in u$, czyli $O(p \vee \sim p) \notin u$. Stąd, na mocy definicji N_L, mamy $[p \vee \sim p]^{ML} \notin N_L(u)$, a ponieważ $[p \vee \sim p]^{ML} = U_L$, więc $U_L \notin N_L(u)$, co prowadzi do sprzeczności z założeniem.

(W5) Załóżmy nie wprost, że $\varnothing \in N_L(u)$. Zatem istnieje formuła A, że $OA \in u$ oraz $[A]^{ML} = \varnothing$. Ponieważ u jest zupełnym i niesprzecznym rozszerzeniem systemu LP zatem $\sim O(p \wedge \sim p) \in u$, czyli $O(p \wedge \sim p) \notin u$. Stąd, na mocy definicji N_L, mamy $[p \wedge \sim p]^{ML} \notin N_L(u)$, a ponieważ $[p \vee \sim p]^{ML} = \varnothing$, więc $\varnothing \notin N_L(u)$, co prowadzi do sprzeczności z założeniem.

Twierdzenie 3 (podstawowe dla modelu kanonicznego) Dla dowolnej formuły A języka J i dowolnego $u \in U_L$ zachodzi równoważność

$(M_L, u) \models A$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A \in u$.

Dowód. Indukcyjnie względem możliwej budowy formuły A:

(i) $A = p$, gdzie p jest dowolną zmienną zdaniową. Na mocy definicji modelu kanonicznego $(M_L, u) \models p$ wtedy i tylko wtedy, gdy $u \in [p]^{ML}$, czyli $u \in \{v \in U_L: p \in v\}$, stąd $p \in u$.

(ii) $A = \sim B$. Przyjmijmy założenie indukcyjne na mocy którego twierdzenie jest spełnione dla formuły B, tj. $(M_L, u) \models B$ wtedy i tylko wtedy, gdy $B \in u$. Równoważnie możemy napisać $(M_L, u) \not\models B$ wtedy i tylko wtedy, gdy $B \notin u$. Korzystając z definicja spełniania i z tego, że skoro u jest zbiorem zupełnym, więc $B \notin u$ jest ekwiwalentne $\sim B \in u$, otrzymujemy dowodzoną równoważność: $(M_L, u) \models \sim B$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\sim B \in u$.

(iii) $A = B \rightarrow C$. Przyjmijmy założenie indukcyjne na mocy którego twierdzenie jest spełnione dla formuł B i C. Warunek $(M_L, u) \models B \rightarrow C$

jest równoważny, jeśli $(M_L, u) \models B$, to $(M_L, u) \models C$. Korzystając z założenia indukcyjnego otrzymujemy warunek: jeśli $B \in u$, to $C \in u$. Ponieważ zaś u jest zbiorem zupełnym, więc $B \rightarrow C \in u$.

(iv) $A = OB$. Przyjmijmy założenie indukcyjne na mocy którego twierdzenie zachodzi dla formuły B. Załóżmy wpierw, że $OB \in u$. Pokażemy stąd $(M_L, u) \models OB$. Z założenia oraz definicji N_L mamy $[B]^{ML} \in N_L(u)$, czyli $\{v \in U_L\colon B \in v\} \in N_L(u)$. Korzystając z założenia indukcyjnego otrzymujemy więc $\{v \in U_L\colon (M_L, u) \models B\} \in N_L(u)$. Stąd $(M_L, u) \models OB$.

Odwrotnie. Załóżmy teraz, że $(M_L, u) \models OB$. Stąd, na mocy definicji modelu kanonicznego, istnieje $X \in N_L(u)$ że $X = [B]^{ML} = \{v \in U_L\colon B \in v\}$. Z założenia indukcyjnego zbiór ten jest równy zbiorowi $\{v \in U_L\colon (M_L, u) \models B\}$. Ponieważ $X \in N_L(u)$, więc musi istnieć formuła C, że $OC \in u$ i $X = [C]^{ML}$. Zatem $[B]^{ML} = [C]^{ML}$, czyli formuła $B \equiv C$ jest zawarta w każdym zbiorze zupełnym, a więc jest twierdzeniem LP. System LP jest zamknięty na regułę ekstensjonalności, zatem $OB \equiv OC$ jest twierdzeniem LP. Z tego więc, że $OC \in u$ wynika $OB \in u$.

Pomijamy przypadek gdy $A = PB$, jako analogiczny względem powyższego.

Twierdzenie 4 (o pełności dla LP) Dla dowolnej formuły A języka J

LP $\vdash$ A wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego M i dowolnego u, $(M, u) \models A$.

Dowód. Implikację z lewej strony do prawej załatwia twierdzenie 1. Natomiast aby dowieść, że dla dowolnego modelu M i świata u, jeśli $(M, u) \models A$, to LP $\vdash$ A załóżmy LP $\nvdash$ A. Stąd istnieje takie rozszerzenie u logiki LP dla którego $A \notin u$. Z twierdzenia podstawowego dla modelu kanonicznego wnosimy, że $(M, u) \nvDash A$.

IV. Reprezentacja systemu LP jako fragmentu logiki aletycznej. W tej części pracy naszym zadaniem jest odpowiedź na pytanie czy system LP da się przedstawić jako fragment pewnej aletycznej logiki modalnej. W tym celu zdefiniujemy pewien system logiki aletycznej LPQ, następnie podamy funkcję tłumaczenia języka systemu LP w język systemu LPQ taką, że każde twierdzenie LP po przetłumaczeniu staje się twierdzeniem LPQ, i *vice versa.*

Na słownik języka JQ składają się: zmienne zdaniowe p, q, r..., stała zdaniowa Q, spójniki KRZ, nawiasy jako symbole pomocnicze oraz aletyczne operatory modalne $\Box$ i $\Diamond$ dla oznaczenia – kolejno – konieczności i możliwości.

Zbiór formuł poprawnie zbudowanych języka JQ to najmniejszy zbiór H spełniający następujące warunki:

(i) $p, q, r\ldots \in H$,

(ii) $Q \in H$,

(iii) jeśli $A, B \in H$, to $\sim A$, $A \rightarrow B$, $\Box A$, $\Diamond A \in H$.

Pozostałe spójniki KRZ jako skróty definicyjne wprowadzamy w standardowy sposób.

Zbiór tez systemu LPQ to najmniejszy zbiór zawierający aksjomaty:

(A0Q) Wszystkie tautologie KRZ,

(A1Q) $\Box (p \rightarrow q) \rightarrow \Box p \rightarrow \Box q$,

(A2Q) $\Box p \wedge \Box q \rightarrow \Box (p \wedge q)$,

(A3Q) $\Box (p \wedge q) \rightarrow \Box p \vee \Box q$,

(A4Q) $\sim\Box (p \vee \sim p)$,

(A5Q) $\sim\Box (p \wedge \sim p)$

oraz domknięty na reguły inferencji:

(R1Q) Regułę odrywania,

(R2Q) Regułę podstawiania,

(R3Q) Regułę wzajemnego zastępowania wyrażeń definicyjnie równoważnych,

(R4Q) Regułę ekstensjonalności: $A \equiv B / \Box A \equiv \Box B$.

Pojęcia wyprowadzalności i niesprzeczności wprowadzamy podobnie jak dla systemu LP.

Definicja Modelem otoczeniowym języka systemu LPQ nazywamy trójkę uporządkowaną M` = <U, N, opt, V>, gdzie U jest niepustym zbiorem światów możliwych, N jest funkcją przyporządkowującą każdemu elementowi zbioru U pewien zbiór podzbiorów U, zwanych otoczeniami u, opt jest podzbiorem U (myślimy o nim jako o zbiorze światów wyróżnionych deontycznie, światach optymalnych), a V jest funkcją wartościowania, która zmiennym zdaniowym przyporządkowuje podzbiory zbioru U.

Definicja (spełnianie) Warunki spełniania w modelu M` formuł języka JQ są analogiczne jak dla języka logiki LP w modelu M. Wyjątkiem jest dodatkowy przypadek dla stałej Q:

(M`, u) $\models$ Q wtedy i tylko wtedy, gdy u $\in$ opt.

Twierdzenie 5 System LPQ jest spełniony w każdym modelu M spełniającym warunki (W1) – (W5).

Dowód. Por. dowód twierdzenia 1.

Również definicja modelu kanonicznego potrzebnego do dowodu pełności systemu LPQ nie różni się nadto od modelu kanonicznego dla LP. Otoczeniowym modelem kanonicznym będzie czwórka uporządkowana $M_{LQ} = \langle U_{LQ}, N_{LQ}, opt_{LQ}, V_{LQ} \rangle$, gdzie

$opt_{LQ} = \{v \in U_{LQ}: Q \in v\}$.

Twierdzenie 6 Model kanoniczny M_{LQ} spełnia warunki (W1) – (W5). Jest więc modelem LPQ.

Dowód. Por. dowód twierdzenia 2.

Twierdzenie 7 Dla dowolnej formuły A języka JQ i dowolnego u $\in$ U_{LQ} zachodzi równoważność

$(M_{LQ}, u) \models A$ wtedy i tylko wtedy, gdy A $\in$ u.

Dowód. Tu jako nowy przypadek (pozostałe patrz dowód twierdzenia 3) musimy rozpatrzyć równoważność $(M_{LQ}, u) \models Q$ wtedy i tylko wtedy, gdy Q $\in$ u. I tak, z definicji spełniania mamy $(M_{LQ}, u) \models Q$ wtedy i tylko wtedy, gdy u $\in$ opt_{LQ}, co na mocy definicji zbioru opt_{LQ} w modelu kanonicznym jest równoważne Q $\in$ u.

Twierdzenie 8 (o pełności LPQ) Dla dowolnej formuły A języka JQ

LPQ $\vdash$ A wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego modelu M` i dowolnego świata u (M`, u) $\models$ A.

Dowód. Bezpośrednio z twierdzeń 5 i 7.

Definicja (funkcja tłumaczenia φ**)** Dla dowolnej formuły A języka J, definiujemy formułę φ(A) języka JQ, indukcyjnie, ze względu na możliwą budowę formuły A.

(i) $\varphi(p) = p$, dla dowolnej zmiennej zdaniowej p,

(ii) $\varphi(\sim B) = \sim\varphi(B)$,

(iii) $\varphi(B \rightarrow C) = \varphi(B) \rightarrow \varphi(C)$,

(iv) $\varphi(OB) = \Box(Q \rightarrow \varphi(B))$[7],

(v) $\varphi(PB) = \Diamond(Q \wedge \varphi(B))$.

Twierdzenie 9 (o przekładzie) Dla dowolnej formuły A języka J:

LP $\vdash$ A wtedy i tylko wtedy, gdy LPQ $\vdash$ φ(A).

Dowód. Dowód pierwszej implikacji, jeśli LP $\vdash$ A, to LPQ $\vdash$ φ(A), będzie przebiegać indukcyjnie względem możliwego dowodu A w systemie LP.

(i) A jest aksjomatem LP.

(A0) Pomijamy jako przypadek trywialny.

(A1) Załóżmy (A1Q): $\Box(p \rightarrow q) \rightarrow \Box p \rightarrow \Box q$. Podstawiając p/(Q $\rightarrow$ p) i q/(Q $\rightarrow$ q) otrzymujemy $\Box((Q \rightarrow p) \rightarrow (Q \rightarrow q)) \rightarrow \Box(Q \rightarrow p) \rightarrow \Box(Q \rightarrow q)$. Stąd $\Box$ (Q $\rightarrow$ (p $\rightarrow$ q)) $\rightarrow \Box(Q \rightarrow p) \rightarrow \Box(Q \rightarrow q)$, co jest aksjomatem (A1) *via* funkcja φ.

(A2) Załóżmy (A2Q): $\Box p \wedge \Box q \rightarrow \Box(p \wedge q)$. Podstawiając p/(Q $\rightarrow$ p) i q/(Q $\rightarrow$ q) otrzymujemy $\Box(Q \rightarrow p) \wedge \Box(Q \rightarrow q) \rightarrow \Box$ ((Q $\rightarrow$ p) $\wedge$ (Q

[7] O stałej Q możemy myśleć jako o zawartości pewnego kodeksu normatywnego tak, że cały zwrot $\Box(Q \rightarrow A)$ możemy czytać „z konieczności A wynika z ustalonego kodeksu normatywnego (wynika z tego, co moralność zaleca)". Idea ta pochodzi pierwotnie z nieopublikwanego doktoratu S. Kangera. Por. S. Kanger: *New foundation for ethical theory*, w: *Deontic logic. Introductory and systematic readings*, R. Hilpinen (ed.). Dordrecht 1971, s. 53-54.

$\rightarrow q))$. Stąd $\Box(Q \rightarrow p) \land \Box(Q \rightarrow q) \rightarrow \Box(Q \rightarrow (p \land q))$, co jest aksjomatem (A2) *via* funkcja φ.

(A3) Pomijamy jako przypadek analogiczny do dwóch powyższych.

(A4) Załóżmy (A4Q): $\sim\Box(p \lor \sim p)$. Na mocy zasady symplifikacji otrzymujemy $\sim\Box(Q \rightarrow (p \lor \sim p))$, co jest aksjomatem (A4) *via* funkcja φ.

(A5) Załóżmy (A5Q): $\sim\Box(p \land \sim p)$. Na mocy zasady symplifikacji otrzymujemy $\sim\Box(Q \rightarrow (p \land \sim p))$, co jest aksjomatem (A5) *via* funkcja φ.

(ii) Formuła A powstała z formuł już udowodnionych przez zastosowanie jednej z reguł inferencji.

Pomijamy jako oczywiste przypadki dla reguł (R1), (R2) i (R3).

(R4) Załóżmy, że A powstało przez zastosowanie (R4) do $B \equiv C$, przy czym $LP \vdash B \equiv C$. Przyjmijmy założenie indukcyjne na mocy którego twierdzenie jest spełnione dla tej formuły. Z założenia indukcyjnego $LPQ \vdash \varphi(B) \equiv \varphi(C)$. Dalej, na mocy zasady symplifikacji, mamy $LPQ \vdash Q \rightarrow \varphi(B) \equiv Q \rightarrow \varphi(C)$ i z zasady ekstensjonalności (R4Q) otrzymujemy $LPQ \vdash \Box(Q \rightarrow \varphi(B)) \equiv \Box(Q \rightarrow \varphi(C))$.

Dowód drugiej implikacji, jeśli $LPQ \vdash \varphi(A)$, to $LP \vdash A$, będzie przebiegać następująco.

Załóżmy, że $LP \nvdash A$, zatem, z twierdzenia o pełności mamy, iż dla pewnego modelu M, $M \nvDash A$. Dla dowolnego modelu $M = \langle U, N, V\rangle$ dla języka LP, można skonstruować pewien model $M^* = \langle U^*, N^*, opt, V^*\rangle$ dla języka LPQ, taki że $U^* = U$, $N^* = N$, $V^* = V$ oraz dla dowolnego v

(#) $(M, v) \vDash A$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(M^*, v) \vDash \varphi(A)$.

Ponadto M* jest modelem spełniającym wszystkie warunki nakładane na klase modeli wyznaczającą logikę LPQ. Zatem, skoro dla pewnego modelu M, $M \nvDash A$, więc, korzystając z własności (#), otrzymamy $M^* \nvDash \varphi(A)$ i stąd $LPQ \nvdash \varphi(A)$, co zakończy dowód.

Definicja (model M*) Niech M = <U, N, V> będzie dowolnym modelem LP. Zdefiniujemy M* jako czwórkę uporządkowaną <U, N*, opt, V>, gdzie

(i) $N^* = N$

(ii) opt = $\{v \in U$: dla pewnego $u \in U$, $v \in \bigcap N(u)\}$

Twierdzenie 10 Powyżej zdefiniowany model M* spełnia warunki (W1) – (W5). Jest zatem modelem systemu LPQ.

Dowód. Por. dowód twierdzenia 5.

Twierdzenie 11 (o funkcjach) Dla dowolnego $u \in U$ i $X \subseteq U$,

$X \in N(u)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X \in N^*(u)$ i opt $\subseteq X$.

Dowód. Pierwsza implikacja. Załóżmy, że $X \in N(u)$. Stąd, na podstawie prawa generalizacji egzystencjalnej, dla pewnego $u \in U$, $X \in N(u)$; a więc, z definicji opt, opt $\subseteq X$. Ponadto, skoro $N^* = N$, więc dla pewnego $u \in U$, $v \in N^*(u)$ i opt $\subseteq X$, co kończy dowód pierwszej implikacji. Odwrotna implikacja jest trywialna pamiętając, że $N^* = N$.

Twierdzenie 12 (o zachodzeniu własności (#)). Dla dowolnej formuły A języka J i $u \in U$,

$(M, u) \models A$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(M^*, u) \models \varphi(A)$.

Dowód. Dowód będzie przebiegać indukcyjnie względem możliwej budowy formuły A. Z braku miejsca rozpatrzymy tylko nietrywialny przypadek gdy A = OB.

Przyjmijmy założenie indukcyjne na mocy którego twierdzenie jest spełnione dla formuły B. Niech $(M^*, u) \models \Box(Q \rightarrow \varphi(B))$, stąd, z definicji spełniania, opt $\subseteq [\varphi(B)]^{M^*} \in N^*(u)$. Korzystając z założenia indukcyjnego $[\varphi(B)]^{M^*} = \{v \in U: (M^*, v) \models \varphi(B)\} = \{v \in U: (M, v) \models B\} = [B]^M$ oraz z faktu, że $N^* = N$ otrzymujemy $[B]^M \in N(u)$, co jest równoważne $(M, u) \models$ OB.

IV. Zakończenie. W części pierwszej pracy powiedzieliśmy, że system LP wydaje się być dobrym systemem do formalnej analizy pojęcia powinności. Z tych samych powodów, które podaliśmy system ten nadaje się do formalnych analiz pojęcia dobra[8]. Stąd dysponując analogicznymi systemami formalnymi dla grupy pojęć powinność-dozwolenie-zakaz i dobro-akceptowalność-zło możemy realizować projekt budowy multimodalnej logiki deontyczno-etycznej[9]. Oczywiście najważniejsze tu zadanie, to położenie właściwych aksjomatów łączących te dwie płaszczyzny, płaszczyznę obowiązków i wartości (norm i ocen). Czy będzie to aksjomat

(*deon*) $Op \rightarrow Dp$

właściwy dla wszelkiego rodzaju stanowisk deontologicznych (symbol D jest operatorem dobra. Dalej będziemy używać również operator A dla akceptowalności), czy też aksjomat

(*teleo*) $Dp \rightarrow Op$

właściwy dla grupy teorii zwanych teoriami teleologicznymi, to już spór ściśle metaetyczny, który wykracza poza ramy tej pracy.

Jak pokazaliśmy w części trzeciej pracy operator powinności, a w konsekwencji i dobra[10], dają się zredukować w logice aletycznej do operatora konieczności. T. J. Smiley mówi o nich jako o zrelatywizowanych operatorach konieczności, gdyż jeśli Op i Dp tłumaczymy odpowiednio jako $\Box(Q \rightarrow p)$ i $\Box(R \rightarrow p)$, to wyrażamy idee, że p jest z konieczności relatywne do Q lub że jest z konieczności relatywne do R (do pewnego kodeksu norm lub ocen moralnych)[11]. Tym natomiast co odpowiada w semantyce światów możliwych stałym Q i R są zbiory światów doskonałych, kolejno, w sensie deontycznym i etycznym (oznaczmy je opt i optD). Widzimy zatem, że zbiory światów doskonałych wyznaczają pojęcie powinności i dobra, gdyż wystarczy

---

[8] W szczególności system ten jest wolny od tych zarzutów, które stawia D. Łukasiewicz logikom normalnym i regularnym dla pojęcia dobra. Zob. D. Łukasiewicz: *Źródła, zasady i perspektywy realizmu moralnego Tadeusza Czeżowskiego*. „Ruch Filozoficzny" 4(2009), s. 663-673.

[9] Logikę taką postuluje M. Rebuschi, a wcześniej A. A. Iwin. Zob. M. Rebuschi: *Czeżowski's axiological concepts as full-fledged modalities. We must either make what is good, or become Revisionists*. "Forum Philosophicum" 13(2008), s. 103-110; A. A. Iwin: *Osnowanija logiki ocenok*. Moskwa 1970, s. 169-218.

[10] Por. A. A. Iwin, *op. cit.*, s. 86-89.

[11] Zob. T. Smiley: *Relative necessity*. "The Journal of Symbolic Logic", 2(1963), s. 113.

wskazać część wspólną między zbiorem światów doskonałym, a zbiorem światów gdzie spełniona jest dana formuła aby poznać kwalifikację moralną tej formuły, mianowicie

Op wtw, gdy opt $\cap$ V(p) = opt, Dp wtw, gdy optD $\cap$ V(p) = optD,

Pp wtw, gdy opt $\cap$ V(p) $\neq \emptyset$, Ap wtw, gdy optD $\cap$ V(p) $\neq \emptyset$.

Podobnie, podanie aksjomatu łączącego płaszczyznę powinności i dobra w semantyce sprowadza się do podania mnogościowych relacji między opt i optD. Na przykład przyjmując aksjomat (*deon*) stwierdzamy, że ogół światów doskonałych w sensie etycznym jest podzbiorem zbioru światów doskonałych w sensie deontycznym, czyli że w każdym świecie w którym króluje dobro, wszystkie obowiązki są spełnione (opt $\subseteq$ optD).

Można również w semantyce pokazać pewien porządek na stanach rzeczy ze względu na relację bycia lepszym pod względem moralnym. O pewnych stanach rzeczy możemy powiedzieć, że są ideałami moralnymi, czyli takie, które są wartościowe oraz czynią zadość wszelkim powinnościom (symbolicznie {p: V(p) $\subseteq$ opt i V(p) $\subseteq$ optD}). Takie stany rzeczy postawimy najwyżej w tym porządku. Są również stany rzeczy, gdzie dominuje zło i to, co zabronione ({p: V(p) $\cap$ opt = $\emptyset$ i V(p) $\cap$ optD = $\emptyset$}). Te postawimy najniżej.

Ogół stanów rzeczy utworzyłby diagram kwadratu eksponując kolejne subtelności kwalifikacji moralnych. Na przykład, gorsze od najlepszych są te światy, w których albo obowiązki są spełnione, ale ze złych intencji, albo gdzie choć intencje są dobre, to jednak łamie się zakazy (punkty skrajnie boczne); ale już trudno jest powiedzieć, która z tych dwóch opcji jest lepsza.

Summary

Our primary task is on investigation of the certain deontic modal system, namely the LP system.

Firstly, we ask what is or what isn't the theorem of this system and next are that theorems agree with our intuition from the field of morality.

In the next part we show completeness theorem for the LP system useing neighborhood semantics and how this system is represented in the certain alethic modal logic (in the Kangeran-style reduction).

Finally, we present the conception of semantical description for the multimodal deontico-ethical system to make possible formalization of mutuality relation between conceptions of ought and good.

Key words: ought, deontic logic, relation between ought and good.