EDUKACJA FILOZOFICZNA
Vol. 50 20010

O DYDAKTYCE FILOZOFII
I MATERIAŁY DYDAKTYCZNE

MIECZYSŁA W OMYŁA
Uniwersytet Warszawski

INTUICJA W NAUKACH FORMALNYCH[1]

Celem artykułu jest zapoznanie czytelnika, który nie jest matematykiem ani logikiem, z rolą intuicji w naukach dedukcyjnych sformalizowanych. Tytułowe zagadnienie jest rozpatrywane z punktu widzenia filozofii nauki, a nie z punktu widzenia psychologii i matematyki. Intuicja jest tutaj traktowana jako pewien pomost między szeroko rozumianą obserwacją a ścisłym dedukcyjnym rozumowaniem.

1. Przedmiot nauk formalnych.

1.1 Przedmiot matematyki.

Nauki formalne to przede wszystkim matematyka i logika. W starożytności sądzono, że matematyka jest nauką o liczbach i figurach geometrycznych. Dlatego przez wiele stuleci podstawowymi dyscyplinami matematycznymi była arytmetyka i geometria. Nauki takie, jak mechanika, astronomia, optyka i akustyka uważano również za nauki matematyczne dlatego, że podstawowe prawa tych nauk wyrażają się za pomocą związków między wielkościami liczbowymi. Poglądy te panowały aż do XVII wieku. Jednak badania matematyczne prowadzone na przestrzeni wieków doprowadziły do współczesnych poglądów na temat przedmiotu matematyki, zgodnie z którymi istotą matematyki jest badanie możliwych struktur formalnych. Nie należy natomiast do matematyki dociekanie, między jakiego typu przedmiotami struktury te mogą się realizować.

Przytoczymy niektóre poglądy wybitnych matematyków odnoszące się do tej kwestii. George Boole w swoich pismach z lat 1847-1854

[1] Jest to nieco zmodyfikowany referat wygłoszony na konferencji „Intuicja w procesie decyzyjnym" zorganizowaną przez Wyższą Szkołę Promocji w Warszawie. Pracę wykonano w ramach programu badawczego nr NN 1101 410835 *Semantyka i pragmatyka zdań. Filozofia fizyka i figo meta-filozofia.*

stwierdza: „nie należy do istoty matematyki zajmować się ideami liczby i wielkości, tylko operacjami rozważanymi samymi w sobie, niezależnie od różnych obiektów, do których mogą być zastosowane".

Niemiecki matematyk Hankel[2] określał matematykę jako „czystą teorię form, mającą za przedmiot nie kombinację wielkości czy ich obrazów czyli liczb, lecz obiektów myślowych, którym odpowiadać mogą obiekty lub relacje efektywne, choć odpowiedniość taka nie jest konieczna".

Z bardziej współczesnych matematyków, to wybitny matematyk francuski Henri Poincare w książce *Nauka i hipoteza* napisał: „Matematycy nie badają przedmiotów, lecz stosunki między przedmiotami, obojętne jest im tedy zastąpienie tych przedmiotów przez inne, byleby tylko stosunki nie zostały zmienione". Z kolei wybitny matematyk rosyjski A. D. Aleksandrow w pracy *Co to jest geometria* napisał: „Nie należy wyobrażać sobie rozwoju geometrii w ten sposób, że rejestruje ona jedynie i opisuje w języku geometrycznym formy i stosunki napotykane w praktyce i podobne do przestrzennych (...) Przy abstrakcyjnym ich określeniu przestrzenie i figury rozpatruje się, jako możliwe formy rzeczywistości".

Matematycy podkreślają, że nie zajmują się dowolnymi formalnymi teoriami, tylko tymi, które mają intuicyjne podłoże. W przedmowie do książki [2] Wiliama Fellera czytamy: „W każdej dyscyplinie musimy starannie wyróżnić trzy aspekty teorii: (a) formalną treść logiczną, (b) podłoże intuicyjne, (c) zastosowania" . Teorie matematyczne zawarte w takich działach matematyki, jak: arytmetyka, geometria, analiza matematyczna, rachunek prawdopodobieństwa, statystyka, teoria gier mają łatwo uchwytne podłoże intuicyjne i teorie te są pewnymi wyidealizowanymi schematyzacjami pewnych aspektów świata.

1.2 Przedmiot logiki.

Podobnie do matematyki, również logika jest nauką formalną. Bada ona strukturę czy też formę poprawnych rozumowań. Poszczególne rozumowanie jest procesem psychicznym i jako proces psychiczny może być przedmiotem badań psychologii. Natomiast badanie wzajemnych

[2] Poglądy Boole'a, Hankela i innych matematyków cytujemy za Nichlas Bourbaki: *Elementy historii matematyki,* tłum. S. Dobrzycki. Warszawa 1980.

związków zachodzących między treściami myśli wykracza poza psychologię.

Aby wzajemne związki logiczne między myślami mogły być badane w sposób naukowy, myśli te muszą być wyrażone, a następnie poddane badaniu, które jest możliwe do ogólnie dostępnego sprawdzenia.

U źródeł logiki - jako nauki, znajduje się pogląd, że wszelkie intuicyjne rozumowanie jest mniej lub bardziej poprawnie wyrażalne językowo i może być reprezentowane przez pewien formalny schemat rozumowania. Logika ustala formalne schematy poprawnych rozumowań oraz zajmuje się możliwymi związkami formalnymi zachodzącymi z jednej strony między strukturą języka a strukturą rzeczywistości, a z drugiej strony między językiem a jego użytkownikami.

W logice określa się idealne języki, które posiadają istotne, z punktu widzenia rozumowania, cechy zarówno języków potocznych, jak i naukowych. W tych idealnych językach formalizujemy przeprowadzone w rzeczywistości rozumowania, dzięki czemu ujawniamy ukryte założenia rozumowań oraz wykrywamy ewentualne błędy popełniane w trakcie przeprowadzania wnioskowań.

Język we współczesnej logice został rozłożony na dwie składowe: język formalny oraz jego interpretację czyli model tego języka.

Język formalny jest to system znaków, którego zbiór wszystkich wyrażeń poprawnie zbudowanych jest określony bez odwoływania się do interpretacji tego języka. Język formalny jest to język niezinterpretowany. Język formalny może mieć wiele, a nawet nieskończenie wiele różnych dopuszczalnych przez logikę interpretacji. W celu zinterpretowania języków formalnych współczesna semantyka logiczna posługuje się na ogół terminologią teoriomnogościową. Możliwe, czyli dopuszczalne, logicznie interpretacje języka określa się za pomocą zbiorów, relacji i funkcji.

Logicy konstruują przede wszystkim takie języki formalne, które służą lub mogą służyć do formalizacji rozumowań przeprowadzanych zarówno w języku potocznym jak i w językach nauki.

2. Podłoże intuicyjne logiki.

2.1 Intuicje w logice klasycznej.

Zwolennicy logiki klasycznej uważają, że reguły logiczne, które pozwalają z dowolnych zdań wyprowadzać zdania z nich wynikające, nie zależą od natury obiektów, których te zdania dotyczą. Niezależnie od tego, czy rozumujemy o przedmiotach konkretnych czy abstrakcyjnych, o tworach przyrody czy myśli ludzkiej, o przedmiotach rzeczywistych czy tylko pomyślanych, niezmiennych czy zmiennych, to prawa poprawnego rozumowania są takie same. Dlatego w schematach niezawodnych rozumowań formułowanych w logice klasycznej występują litery reprezentujące nazwy dowolnego rodzaju przedmiotów oraz litery reprezentujące dowolne własności przedmiotów i dowolne relacje.

Ponadto w języku klasycznej logiki występują: (a) wyłącznie spójniki prawdziwościowe, tzn. takie, że wartość logiczna zdania za ich pomocą złożonego zależy wyłącznie od wartości logicznych zdań składowych, (b) kwantyfikatory: ogólny i egzystencjalny, dlatego, że pojęcia ogólności i istnienia odnoszą się do dowolnego rodzaju przedmiotów. Ponadto zgodnie z filozofią logiki klasycznej: cokolwiek istnieje, jest przedmiotem, tzn. posiada jakieś własności, oraz każdy przedmiot istnieje, czyli nie ma przedmiotów nie istniejących. Natomiast istnieją pojęcia puste, to znaczy takie, pod które nie podpada żaden przedmiot.

Intuicje znajdujące się u podstaw niektórych logik nieklasycznych. Nie wszyscy jednak logicy i matematycy podzielają poglądy logików klasycznych, na przykład zwolennicy logiki i matematyki intuicjonistycznej sądzą, że nie możemy mechanicznie przenosić schematów rozumowań dotyczących zbiorów skończonych na zbiory nieskończone. Według intuicjonistów, istnieją tylko zbiory potencjalnie nieskończone, a nie istnieją zbiory aktualnie nieskończone.

Definicja

Zbiór A jest potencjalnie nieskończony, gdy w zbiorze tym można określić relację R, która jest równocześnie asymetryczna i przechodnia oraz dodatkowo spełnia warunek:

$$V x B y (x R y).$$

Przykładem zbioru potencjalnie nieskończonego jest zbiór liczb naturalnych N, gdyż w zbiorze tym można określić relację nierówności $<$ o następujących trzech własnościach:

$$(x < y) \longrightarrow \neg(y < x)$$

$$(x < y \wedge y < z) \rightarrow (x < z)$$

$$Vx\ 3y\ (x < y)$$

Podobnie potencjalnie nieskończonym jest zbiór liczb parzystych, gdyż dla każdej liczby parzystej istnieje liczba parzysta od niej większa.

Jeżeli wszystkie elementy danego zbioru potencjalnie nieskończonego istnieją równocześnie to zbiór jest aktualnie nieskończony. Według intuicjonistów jest to niemożliwe.

Ponadto zwolennicy logiki intuicjonistycznej kwestionują uniwersalną ważność klasycznego prawa wyłącznego środka:

(1) $p \vee \neg p$

Według intuicjonistów, prawo to nie stosuje się do zbiorów nieskończonych. Dlatego, że z tego, że fałszywe jest zdani $\neg p$ nie wynika na gruncie logiki intuicjonistycznej, że prawdziwe jest zdanie *p*.

Twierdzeniami logiki intuicjonistycznej są formuły:

(2) $[p \rightarrow (q \wedge \neg q)] \rightarrow \neg p$

(3) $p \rightarrow \neg (\neg p)$

(4) $(p \wedge \neg p) \rightarrow q$

Natomiast nie są twierdzeniami logiki intuicjonistycznej formuły:

(5) $[\neg p \rightarrow (q \wedge \neg q)] \rightarrow p$

(6) $\neg (\neg p) \rightarrow p$

Formuła (5) nie jest prawem logiki intuicjonistycznej dlatego, że gdy za zmienną *p* podstawimy formułę 3x *P(x)* stwierdzającą, że istnieje przedmiot x, który ma własność *P*, to jeżeli formuła $\neg$3x P(x) implikuje sprzeczność, to nie znaczy, że istnieje przedmiot o własności *P*.

Formuła

(7) $[\neg \text{Ex } p(x)] \rightarrow \text{Ex } P(x)$

jest szczególnym przypadkiem formuły (5) i również nie jest prawem logiki intuicjonistycznej.

Analogicznie szczególnym przypadkiem formuły (6) jest schemat:

$$\neg [\neg \text{Ex } P(x)] \rightarrow \text{Ex } P(x)$$

która stwierdza, że jeżeli nieprawdą jest, że nie istnieje przedmiot o własności *P*, to w takim wypadku istnieje przedmiot o własności *P*, co jest niezgodne z intuicjami znajdującymi się u podstaw logiki intuicjonistycznej.

Według logików i matematyków intuicjonistycznych, aby przedmiot abstrakcyjny w rzeczywistości matematycznej istniał, to musi być efektywnie skonstruowany. W przypadku gdy nie istnieje efektywna procedura konstrukcji danego przedmiotu, to nie możemy twierdzić, że ten przedmiot istnieje.

Innym przykładem logiki, w której nie w pełni zachowane są intuicje logiki klasycznej, jest logika trójwartościowa Jana Łukasiewicza. Według Jana Łukasiewicza, niektóre zdania stwierdzają zachodzenie pewnych *zdarzeń.* W chwili obecnej zdarzenia przeszłe i teraźniejsze są w pełni zdeterminowane, natomiast wśród przyszłych zdarzeń niektóre są w pełni wyznaczone przez obecny stan świata, a niektóre nie są całkowicie wyznaczone przez aktualną rzeczywistość. Niezdeterminowane zdarzenia Łukasiewicz *nazywał możliwymizdarzeniami* i przypisywał im wartość logiczną Łukasiewicz sądził, że albo *możliwość* jest niestopniowalna i wtedy istnieją trzy wartości logiczne: 0, ⅓ 1 (fałsz, możliwość i prawda), albo też *możliwość* jest nieskończenie stopniowalna i wtedy istnieje nieskończenie wiele wartości logicznych z przedziału [0,1], W tym wypadku Lukasiewicz wartość logiczną zdania interpretował jako prawdopodobieństwo stanu rzeczy, który to zdanie opisuje. Logika trójwartościowa Łukasiewicza jest osłabieniem logiki klasycznej i na przykład następujące formuły nie są jej prawami :

$$p \vee \neg p, \neg (p \wedge \neg p)$$

$$\neg (p \leftrightarrow \neg p), (p \wedge \neg p) \rightarrow q$$

Natomiast, każde prawo logiczne logiki trójwartościowej jest zarazem prawem logiki klasycznej.

Intuicyjnie możemy powiedzieć, że różnica między logiką klasyczną a trójwartościową logiką Łukasiewicza jest pochodna w stosunku do pewnych różnic, dotyczących statusu ontologicznego całkowicie zdeterminowanej teraźniejszości i nie we wszystkich szczegółach zdeterminowanej przyszłości.

Zgodnie z fizyką kwantową, pewne konstrukcje logiczne i językowe powstałe na bazie obserwacji świata dostępnego dla ludzkich zmysłów, gdy odnosimy je do mikroświata, to tracą swój sens. W związku z tym G. Birkhoff i J. von Neumann w pracy *The logic of quantum mechanics* skonstruowali system tzw. logiki mechaniki kwantowej, albo inaczej system logiki modularnej. Logika ta stanowi dobry przykład na to, że gdy zawodzi nas intuicja, której źródłem jest obserwacja zmysłowa, która nie dociera do mikroświata, to możemy skutecznie posłużyć się formalizmem matematycznym.

W klasycznym rachunku zdań, zaksjomatyzowanym po raz pierwszy przez Gottloba Fregego, występują wyłącznie spójniki prawdziwościowe. W związku z tym, w dowolnym języku w którym obowiązuje logika klasyczna, zdania o tej samej wartości logicznej są wzajemnie wymienialne we wszystkich kontekstach zdaniowych. Dlatego Frege przyjmował, zgodnie z zasadą Leibniza *identyczności nieodróżnialnych* założenie, że zdania są nazwami swoich wartości logicznych.

Według Fregego, poszczególne zdania prawdziwe są wyrażeniami wskazującymi tylko na różne aspekty tego samego bytu, a poszczególne zdania fałszywe wskazują różne aspekty niebytu.

Najdobitniej ten pogląd Fregego wyraził Jan Lukasiewicz w okresie, gdy był zafascynowany logiką i filozofią Fregego i w pracy [6] napisał między innymi:

„Dwa różne zdania prawdziwe, na przykład ‘2 razy 2 jest cztery’ i ‘Warszawa leży nad Wisłą’ różnią się tylko swą **treścią,** oznaczają zaś **ten sam** przedmiot, to jest prawdę, tak jak wyrażenie ‘2 razy 2’ i ‘3 więcej 1’ różnią się tylko swoją treścią, oznaczają zaś **ten sam** przedmiot, to jest liczbę 4. Wszystkie zdania prawdziwe oznaczają jeden i ten sam przedmiot, mianowicie prawdę, a wszystkie zdania fałszywe oznaczają ten sam przedmiot, mianowicie fałsz. Prawdę i fałsz uważam za przedmioty w tym samym znaczeniu **jednostkowe** co liczby 2 lub 4. Mamy tyle rożnych nazw jednej tylko prawdy, ile zdań prawdziwych i tyle różnych nazw jednego tylko fałszu, ile zdań fałszywych. Ontologicznie prawdzie odpowiada byt, fałszowi niebyt”

Roman Suszko (1919-1979), wybitny logik polski, zakwestionował pogląd Fregego, że zdania są nazwami swoich wartości logicznych i za Wittgensteinem głosił, że zdania w sensie logicznym przedstawiają *sytuacje.* W związku z tym uważał, że w języku ontologii winny występować zmienne zdaniowe oraz spójnik identyczności. Według Suszki, zmienne zdaniowe nie są schematycznymi literami reprezentującymi zdania w sensie logicznym, tylko przyjmują wartości w zbiorze korelatów semantycznych zdań, którymi są *sytuacje.* Z kolei spójnik identyczności „ ≡ " łączy dwa dowolne zdania a oraz ß w jedno zdanie złożone: a ≡ ß, które jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy oba zdania składowe a i ß odnoszą się do tej samej sytuacji. Zarysowane tutaj intuicje ontologiczne i logiczne stanowią podłoże stworzonej przez Romana Suszkę logiki, nazwanej przez jej autora, logiką niefregowską. Logika ta powstaje z logiki klasycznej przez dodanie do jej alfabetu spójnika identyczności dla którego przyjmuje się między innymi tzw. *specjalny aksjomat identyczności-.*

(8) $(p \equiv q) \rightarrow (p \leftrightarrow q)$

który stwierdza, że jeżeli dwie sytuacje są identyczne, to obie równocześnie zachodzą, bądź też obie równocześnie nie zachodzą. Nazwa *specjalny aksjomat identyczności,* bierze się stąd, że nie ma on swojego odpowiednika wśród aksjomatów dla predykatu identyczności. Odwrócenie formuły (8) czyli formułę:

(AF) $(p \leftrightarrow q) \rightarrow (p \equiv q)$

Suszko nazywał aksjomatem Fregego, gdyż stwierdza ona, że jeżeli dwa zdania są równoważne, czyli mają tę samą wartość logiczną, to przedstawiają one tę samą sytuację.

Przedstawiliśmy tutaj intuicyjne podłoże niektórych współcześnie rozwijanych rachunków logicznych, takich jak klasyczny rachunek zdań, intuicjonistyczny rachunek zdań, logika mechaniki kwantowej oraz logika niefregowską.

Intuicja w naukach formalnych. Omówiliśmy dosyć szeroko - jak na niespecjalistyczne, ogólno-filozoficzne rozważania - przedmiot nauk formalnych w celu wskazania momentów, w których interweniuje rozumowanie intuicyjne. Intuicyjne rozumowanie przeciwstawiamy tutaj rozumowaniu ściśle określonemu pod względem formalnym. Uczony rozumuje intuicyjnie, gdy nie ma świadomości, według jakich reguł logicznych jego rozumowanie przebiega, domyśla się jedynie, czy też przewiduje, że zachodzą pewne związki logiczne między branymi przez niego pod uwagę zdaniami bądź zbiorami zdań.

W świetle tego, co zostało napisane, intuicja jest obecna w każdym stadium uprawiania nauk formalnych, a więc zarówno w stadium tworzenia teorii formalnej na podstawie danych szeroko rozumianego doświadczenia, jak i na etapie rozwijania, systematyzowania i aksjomatyzacji teorii oraz w stadium zastosowań teorii. Omówimy obecnie zwięźle rolę intuicji w poszczególnych stadiach.

3.1 Podłoże intuicyjne teorii formalnych. U źródeł nauk formalnych znajduje się wiele różnych rodzajów intuicji. Mówiąc o podłożu intuicyjnym teorii formalnych mamy na myśli przede wszystkim to, że z występujących w przyrodzie wielkości empirycznych zostały najpierw wyabstrahowane takie pojęcia jak: pojęcie liczby naturalnej, wymiernej, rzeczywistej, pojęcie wektora, zdarzenia elementarnego, pojęcie prawdopodobieństwa zdarzenia i pojęcia podobne, a następnie terminy te zostały sprecyzowane za pomocą ścisłych pojęć teoriomnogościowych takich jak: zbiór, relacja, funkcja.

Pierwotnie liczby naturalne traktowano intuicyjnie jako podstawowe miary ilości elementów, a następnie jako moce zbiorów skończonych, aż dopiero pod koniec XIX wieku niemiecki matematyk Dedekind i włoski matematyk Peano podali zadawalającą aksjomatykę dla liczb naturalnych. Jednak, jak udowodnił Godel w 1931 roku, z aksjomatyki tej, stosując tylko w skończonej liczbie kroków reguły logiczne, nie można wyprowadzić wszystkich twierdzeń prawdziwych w dziedzinie liczb naturalnych.

Podobnie w geometrii przestrzeń fizyczną ***R*** reprezentujemy najpierw przez przestrzeń geometryczną czyli zbiór uniwersalny albo zbiór pełny punktów A, a w dalszej kolejności, każdy punkt przestrzeni traktujemy jako uporządkowaną trójkę liczb rzeczywistych (x, y, z). Odcinki, proste, trójkąty, okręgi oraz pozostałe figury geometryczne są wtedy ściśle określonymi zbiorami punktów będącymi podzbiorami przestrzeni A. W przestrzeni euklidesowej jako przestrzeni jednorodnej nie wyróżnia się żadnych punktów czyli żaden punkt ze zbioru A nie jest elementem wyróżnionym. W geometrii szkolnej rozważa się oprócz relacji między punktami takimi jak: *punkt b znajduje się między punktami a i c*, również różnorodne relacje między figurami, czyli zbiorami punktów, takie jak równoległość prostych czy podobieństwo trójkątów i inne.

Pierwszy z omawianych tutaj rodzajów intuicji znajdujący się w naukach formalnych, jest to ten jej rodzaj, który prowadzi od spostrzeżeń i obserwacji empirycznych do nazw abstrakcyjnych i pojęć formalnych, na przykład do pojęcia liczby, zbioru, trójkąta i podobnych. Ten rodzaj intuicji jest ściśle związany z procesem myślowym zwanym procesem abstrakcji.

Drugi rodzaj intuicji prowadzi od pojęć abstrakcyjnych mniej ogólnych do bardziej ogólnych, na przykład, od pojęcia liczby naturalnej do pojęcia liczby całkowitej, a następnie od pojęcia liczby całkowitej do pojęcia liczby wymiernej i analogicznie, od liczb wymiernych do rzeczywistych i od liczb rzeczywistych do liczb zespolonych. W bardziej zaawansowanej matematyce podobnie od pewnych struktur abstrakcyjnych mniej ogólnych przechodzi się do bardziej ogólnych, na przykład od ciała zbiorów do pojęcia algebry Boole'a, bądź od zbioru liczb rzeczywistych do dowolnego ciała liczbowego. Te drugie z wymienionych pojęć są ogólniejsze, gdyż każde ciało zbiorów jest algebrą Boole'a, a nie każda algebra Boole'a jest ciałem zbiorów, podobnie liczby rzeczywiste stanowią szczególny rodzaj ciała liczbowego mianowicie stanowią ciało uporządkowane w sposób ciągły.

Zarówno w trakcie abstrahowania jak i uogólniania matematycy kierują się intuicją, gdyż na ogół z góry nie wiedzą od jakich własności owocne jest abstrahować, i w jakim kierunku należy pojęcia uogólniać.

Pierwszy z omawianych tu rodzajów intuicji prowadzi od konkretu do abstraktu, to znaczy od przedmiotów konkretnych do przedmiotów abstrakcyjnych, a drugi rodzaj intuicji prowadzi od pojęć abstrakcyjnych mniej ogólnych, do pojęć abstrakcyjnych bardziej ogólnych.

Współcześnie, aby z danego fragmentu rzeczywistości empirycznej ***R*** wydobyć jego strukturę formalną ujmujemy go w *teoriomnogościowe ramy* tzn. traktujemy go jako zbiór A pewnego typu obiektów wraz z wyróżnionymi w nim podzbiorami: Z_1 Z_2 ...i ewentualnie wyróżnionymi elementami: a, b, c,.... oraz określonymi na tym zbiorze relacjami: R_1 R_2, ..,R_m i funkcjami: $F_1F_2,...,F_k$
W rezultacie otrzymujemy dziedzinę matematyczną:

$$(A,\ Z_1Z_2,,\ R_1R_2,...R_m,\ F_1F_2,...,F_k a,\ b,\ c,...)$$

będącą modelem dla pewnego języka predykatów pierwszego rzędu.

Mając daną dziedzinę matematyczną powstaje problem, jakie terminy należy zdefiniować, aby jak najtrafniej tę dziedzinę scharakteryzować. Jest to tak zwany problem definiowalności semantycznej, czyli problem definiowalności w danej ustalonej strukturze.

Na przykład, w geometrii posługując się jedynie zmiennymi, terminami pierwotnymi geometrii i terminami logicznymi definiuje się różne rodzaje figur geometrycznych. Z kolei w oparciu o pojęcie trójkąta i posługując się terminami pierwotnymi geometrii definiuje się takie terminy, jak wysokość trójkąta, środkową, symetralną boku i inne terminy, tak aby uzyskać jak najwięcej twierdzeń dotyczących trójkątów.

3.2 Intuicje związane z formalną treścią teorii. Przez teorię rozumiemy tutaj, zgodnie ze współczesną logiką, zbiór zdań i formuł zdaniowych domknięty na swoje konsekwencje logiczne. Nie interesują nas tutaj jednak najzupełniej dowolne teorie formalne, tylko te, które są rezultatem badań logicznych i matematycznych, czyli takie, które zaspakajają pewne potrzeby poznawcze, gdyż u ich podłoża znajdują się określone intuicje dotyczące szeroko rozumianej rzeczywistości. Przyjmujemy tutaj, że każda teoria formalna jest określona w pewnym sformalizowanym języku.

Lyndon w [5] zwraca uwagę, że istnieją przynajmniej dwa rodzaje teorii matematycznych

(1) teorie opisujące ściśle określoną środkami teoriomnogościowymi dziedzinę matematyczną, czyli teorie takie, jak teoriomnogościowo określona arytmetyka liczb naturalnych, geometria analityczna, rachunek różniczkowy i całkowy, teoria funkcji analitycznych określonych na płaszczyźnie zespolonej, czy teoria funkcji o wartościach rzeczywistych.

(2) teorie określone aksjomatycznie jak teoria grup, pierścieni lub algebr Boole'a.

Teorie pierwszego rodzaju są tworzone w celu opisania jednej ściśle określonej dziedziny matematycznej. Okazuje się jednak, że teorie te mogą być prawdziwe w wielu różnych nieizomorficznych strukturach. Z kolei teorie drugiego rodzaju są tworzone z myślą o pewnej klasie struktur matematycznych, na przykład klasie wszystkich grup, pierścieni bądź klasie wszystkich algebr Boole'a. Ze względu na to, że teoria algebr Boole'a jest ogółem formuł, które są prawdziwe we wszystkich algebrach Boole'a, to istnieją zdania sformułowane w języku tych algebr takie, że ani one, ani ich negacje nie są twierdzeniami teorii algebr

Boole'a, gdyż zdania te są prawdziwe przykładowo w algebrach atomowych, a nie są prawdziwe w algebrach bezatomowych.

Można uznać, że teorie drugiego rodzaju powstały przez odpowiednie uogólnienie teorii pierwszego rodzaju. W obu rodzajach teorii powstaje problem związków dedukcyjnych między formułami należącymi do języków danej teorii.

W badaniu związków dedukcyjnych między zdaniami tej samej teorii, a nawet zdaniami różnych rodzajów teorii, najpełniej ujawnia się intuicja matematyków. Podstawowe dziedziny matematyczne są bowiem ze sobą ściśle powiązane. Znajduje to wyraz w twierdzeniach i formułach, które wiążą ze sobą wiele struktur. Dobrym przykładem jest wzór Eulera:

$$e^{\pi i} + 1 = 0$$

gdzie:

stała liczbowa e jest granicą ciągu: $(1 + ⅓)^n$

Πjest stosunkiem długości dowolnego okręgu do jego średnicy.

1-jest elementem neutralnym dla mnożenia, tzn. dla dowolnej liczby α,

$$\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha$$

jest elementem neutralnym dla dodawania czyli dla dowolnej liczby α,

$$\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$$

i jest liczbą taką, że i^2 =1, zwaną liczbą urojoną. Liczba ta została wprowadzona do matematyki przez włoskiego matematyka Cardana.

Wzór Eulera wiąże ze sobą pięć podstawowych stałych liczbowych znanych z różnych działów matematyki. Liczby: 0, 1 są znane ze wszystkich działów matematyki, a przede wszystkim z arytmetyki i algebry, liczbaπ jest podstawową stałą geometrii, liczba *e* jest znana z analizy matematycznej, a z kolei liczba *i* z algebry.

W historii matematyki znanych jest wiele odkryć i hipotez wskazujących na niezwykłą zdolność matematyków ''widzenia" trudno uchwytnych, nieoczekiwanych związków między poszczególnymi abstraktami oraz strukturami matematycznymi. Wybitny matematyk Jacques Hadamard w książce *Psychologia odkryć matematycznych* nazywa je wręcz „paradoksalnymi przykładami intuicji"; najbardziej znanym przykładem jest wielkie twierdzenie Fermata.

Pierre Fermat (1601-1661), urzędnik francuski, na marginesie książki Diofantosa w 1637 roku napisał:

Dla żadnego n naturalnego i n > 2 nie istnieją rozwiązania równa nia: $x^n + y^n = z^n$, w liczbach naturalnych. Z braku miejsca nie podaję dowodu.

Opublikowano tę hipotezę w 1670 roku i mimo wysiłków niezliczonej liczby matematyków nie udało się jej przez trzysta lat ani udowodnić, ani obalić. Dopiero w 1994 roku Andrew John Wiles, stosując najnowocześniejsze metody matematyczne zaczerpnięte z topologii i geometrii algebraicznej, udowodnił prawdziwość twierdzenia Fermata. Dowód liczył 200 stronic maszynopisu. Prawie równie słynna, co twierdzenia Fermata, jest hipoteza Goldbacha. Hipoteza ta jest znana w sformułowaniu Eulera i stwierdza ona, że:

Każda liczba naturalna parzysta większa od dwóch jest sumą dwóch liczb pierwszych. Goldbach przedstawił swoją hipotezę w liście do Eulera w 1742 roku. Dzięki zastosowaniu współczesnych technik obliczeniowych, wspomaganych najnowszymi komputerami, udowodniono tę hipotezę dla liczb mniejszych niż 410^{17} , natomiast w całej ogólności dotąd hipotezy tej nie udało się udowodnić. Niemniej jednak większość matematyków, znających istotę tego zagadnienia, uważa tę hipotezę za prawdziwą. Przytoczymy jeszcze jeden słynny przykład genialnej intuicji, a mianowicie wielki matematyk niemiecki, Bernhard Riemann (1826-1866), wprowadził funkcję ζ (z) o argumentach zespolonych, określoną wzorem:

$$\zeta (z) = \sum 1/n^z$$

i postawił pewną hipotezę dotyczących jej miejsc zerowych.

Funkcja tą łączy w sobie wiele zagadnień dotyczących funkcji analitycznych, szeregów nieskończonych, problemów całkowych, a przede wszystkim rozmieszczenia liczb pierwszych na osi liczbowej.

Słynny matematyk niemiecki Dawid Hilbert powiedział: „gdyby mi dane było zmartwychwstać za dwieście lat, to nie spytałbym o postępy ludzkie na polu społecznym ani o postępy techniczne, lecz przede wszystkim o to, co wiadomo o miejscach zerowych funkcji dzeta, gdyż jest to nie tylko najciekawsze zagadnienie matematyczne, ale najciekawsze zagadnienie w ogóle...” (cytuję za H. Steinhausem[8]).

Cytat ten wskazuje, na przykładzie Hilberta, na to, jak wielkie jest zaangażowanie genialnych matematyków w żywotne problemy matematyczne. Dogłębna znajomość wielu działów matematyki połączona z wielkim zaangażowaniem w jej problemy jest kluczem do wyjaśnienia intuicji matematycznej tych geniuszy. Zagadką jest to, że wspomniani, a także inni genialni matematycy, znanymi w ich czasach środkami matematycznymi nie mogli tych problemów rozwiązać, a jednak ‘odgadywali’ trafnie rozwiązanie tych problemów.

3.3 Intuicja w zastosowaniach teorii formalnych. Teorie matematyczne i logiczne znajdują zastosowaniem w technice i w prawie wszystkich zaawansowanych naukach. Kepler, dla opisu ruchu planet, posłużył się osiągnięciami geometrii greckiej dotyczącymi własności elipsy. Jeśliby nie znał pojęcia elipsy, nie umiałby opisać ruchu planet. Współczesna fizyka nie jest w stanie wyjaśnić wielu zjawisk zachodzących na poziomie atomowym oraz kwantowym, bez posługiwania się abstrakcyjnymi teoriami matematycznymi. Dzięki zastosowaniom rachunku prawdopodobieństwa i statystyki możemy z dużą dokładnością prognozować pogodę i przewidywać wyniki wyborów. Jednym ze źródeł różnorodnych zastosowań matematyki jest to, że pewne struktury matematyczne mogą stanowić dogodny model dla zjawisk zachodzących w przyrodzie i w społeczeństwie.

Konieczność posługiwania się matematyką w nauce i technice wynika między innymi z następujących dwóch powodów: 1) aby poznać prawa przyrody, musimy abstrahować od czynników przypadkowych, nieistotnych, a zakłócających działania tych praw; 2) przypadku poznawania mikroświata musimy wykraczać poza „zmysłowe formy poznania”.

Na ogół czynniki przypadkowe modyfikują działania praw przyrody i dlatego można sparafrazować wypowiedź Wittgensteina z *Traktatu*, który pisał, że „Wydobycie z języka potocznego logiki naszego języka jest niepodobieństwem, gdyż język ten jest równie skomplikowany jak człowiek”, i powiedzieć, że wydobycie praw przyrody wprost z obserwacji przyrody jest niepodobieństwem.

Dlatego, aby stosować matematykę lub logikę, zmuszeni jesteśmy rzeczywistość empiryczną poddać pewnym uproszczeniom i idealizacjom, tak, aby w języku matematyki można było ją opisywać. W przypadku dowolnego realnego problemu rodzi się pytanie: jakie przyjąć uproszczenia i idealizacje, aby dany problem rozwiązać? Naszą planetę Ziemię w pewnych zagadnieniach astronomicznych traktujemy jako punkt, a w innych traktujemy jako kulę, podobnie kawałek drutu dla pewnych celów traktujemy jako odcinek, a dla innych celów jako walec. W książce [5] Lyndon napisał: „formalne badanie jakiegokolwiek rzeczywistego przedmiotu rozpoczyna się od znalezienia odpowiedniej abstrakcyjnej, wyidealizowanej charakteryzacji wybranej tak, by zachowała te cechy oryginalnego przedmiotu, które są istotne dla tego zadania".

Drugi z wymienionych powodów wynika stąd, że nasze zmysły przystosowane są do obserwacji skończonej liczby przedmiotów „nie zbyt dużych" i „nie zbyt małych", takich, jakie znajdowały się w najbliższym otoczeniu człowieka w czasach, gdy formułowała się świadomość ludzka [9], Dlatego w poznawaniu mikroświata zawodzi nas często intuicja zdroworozsądkowa i musimy wykraczać „poza zmysłowe formy poznania", a w trafnym kierunku prowadzi nas jedynie odpowiednio dobrany formalizm matematyczny.

Aby dla rozwiązania dowolnego problemu możliwe było zastosowanie matematyki czy logiki, to musimy najpierw ustalić formalną strukturę fragmentu rzeczywistości, którego problem dotyczy. W tym celu na ogół ujmujemy ten fragment rzeczywistości za pomocą ścisłych pojęć teorio-mnogościowych, takich jak: zbiór, relacja, funkcja oraz ustalamy, z jakimi zbiorami przedmiotów mamy w danym przypadku do czynienia, a następnie wyróżniamy podzbiory tych przedmiotów i relacje, które są istotne dla danego problemu. Pisząc o tym, chcę zwrócić uwagę na dwa aspekty związane z zastosowaniem teorii matematycznych:

(1) konieczność poddania rzeczywistości empirycznej pewnym uproszczeniom i idealizacjom, tak aby w języku matematyki można było ją opisywać;

(2) szczególną rolę pojęć teorio-mnogościowych, takich jak: zbiór, relacja, funkcja.

Podsumowanie. Nauki formalne, a w szczególności matematyka, nie badają w całej rozciągłości żadnej całości danej nam w poznaniu empirycznym, tylko nauki te badają formalną strukturę danego fragmentu rzeczywistości, na przykład logika bada formalną stronę rozumowań uzasadniających.

Pierwszy rodzaj intuicji omawiany w tej pracy jest ściśle związany z wykrywaniem w danej całości jej struktury formalnej, czyli punkt wyjścia nauk formalnych jest obserwacyjno-intuicyjny. Wiąże się on ściśle z wyborem odpowiedniej terminologii służącej do opisu rozważanej struktury. Podstawowe pojęcia formalne, takie jak: punkt, zbiór, liczba, relacja służą do opisu dowolnej struktury.

Drugi rodzaj intuicji jest związany z uogólnianiem pojęć, to znaczy z przechodzeniem od pojęć abstrakcyjnych mniej ogólnych do bardziej ogólnych. Trzeci rodzaj intuicji związany jest z uzasadnianiem twierdzeń w naukach formalnych. Od czasów Hansa Reichenbacha w filozofii nauki odróżnia się w badaniach prowadzonych nad nauką „kontekst odkrycia" i „kontekst uzasadnienia". Prawa naukowe muszą być uzasadnione zgodnie z wymogami współczesnej logiki i filozofii nauki, czyli muszą być intersubiektywnie sprawdzalne. Natomiast odkrycie danego prawa naukowego, 'wpadnięcie na pomysł' wykracza poza rozważania logiczne i zawsze zawiera pewien element intuicyjny. W przypadku nauk formalnych wszelkie twierdzenia uzasadnia się w sposób dedukcyjny. Rozumowanie dedukcyjne może być ściśle sformalizowane, ale odkrycie danego dowodu czy odkrycie tylko myśli przewodniej danego dowodu ma na ogół charakter nieformalny, czyli intuicyjny.

Aby dana teoria formalna była teorią naukową, a nie tylko formalną grą symbolami, to teoria ta musi mieć interesujące interpretacje, które - zgodnie z postulatem J. Łukasiewicza wyrażonym w pracy [7] - zaspakajają, a przynajmniej przyczyniają się do zaspokojenia jakichś ogólnoludzkich potrzeb poznawczych.

Artykuł ten jest próbą wskazania na różnorodne elementy intuicyjne, które znajdują się w naukach dedukcyjnych sformalizowanych. Pewne intuicje znajdują się u podłoża tych nauk, a inne w trakcie rozwijania formalnych teorii, a jeszcze inne trakcie różnorodnych zastosowań sformalizowanych teorii dedukcyjnych.

Literatura:

[1] Bourbaki N., *Elementy historii matematyki,* PWN, Warszawa 1980, tłum. S. Dobrzycki.

[2] Feller W., *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa i jego zastosowań*, PWN Warszawa 1960.

[3] Grzegorczyk A., *Zastosowanie logicznej metody wyodrębniania formalnej dziedziny rozważań w naukach, technice i gospodarce*, „Studia Filozoficzne 34, (1963), s. 63-75.

[4] Hadamard J., *Psychologia odkryć matematycznych*, PWN Warszawa 1964.

[5] Lyndon R.C., *O logice matematycznej*, PWN, Warszawa 1968.

[6] Lukasiewicz J., *O logice dwuwartościowej,* „Przegląd Filozoficzny”, 23, 1921, s. 189-205.

[7] Lukasiewicz J., *O twórczości w nauce,* [w:] *Z zagadnień logiki i filozofii, Pisma wybrane*, red. J. Słupecki, PWN, Warszawa 1961.

[8] Steinhaus H., *Wspomnienia i zapiski, Aneks,* Londyn 1992.

[9] Suszko R., *Logika formalna a niektóre zagadnienia rozwoju poznania. Diachroniczna logika formalna,* [w:] *Logiczna teoria nauki,* red. T. Pawłowski, PWN, Warszawa 1966.

Summary

The article presents certain attempt to indicate various intuitive elements, that occur in formal deductive sciences. First kind of intuitions underlies formal theories, second sort of intuitions appears within the development process of those theories; and other sort of intuitions occurs within applications of formal deductive sciences.

Problem of intuition is examined here from the viewpoint of philosophy of sciences an not from the viewpoint of psychology or mathematics. In general, intuition is considered here as certain bridge that connects observations (interpreted in a wide sense) with a strictly decuctive reasoning.

Key words: Intuition, formal theory, underlay of formal theory, application of formal theory.