EDUKACJA FILOZOFICZNA
Vol. 38 2004

JAROSŁAW MROZEK
Uniwersytet Gdański

ROLA IDEI FILOZOFICZNYCH W POWSTANIU MATEMATYKI

Pytając o genezę matematyki, pytamy o źródła pojęć, metod matematycznych, skąd i w jaki sposób pojawiła się matematyka. Jest to pytanie bardzo ważne z punktu widzenia całości problematyki filozofii matematyki, gdyż nie można zasadnie orzekać o np. naturae bytów matematycznych bez znajomości genezy tych bytów. Istnieje oczywiście także zależność odwrotna - problem genezy możemy stawiać, gdy już przynajmniej z grubsza wiemy, czego genezę mamy badać. W tym względzie odwołam się do definicji ostensywnej. Przyjmuję, że w przypadku *Elementów* Euklidesa (III w. p.n.e.) mamy już do czynienia z matematyką. Dzieło to wyznaczyło paradygmat uprawiania matematyki na ok. dwa tysiąclecia[1].

Podzielam pogląd Johna von Neumanna, iż „idee matematyczne mają źródło w doświadczeniu, choć ta ich genealogia jest niekiedy długa i niejasna”[2]. Archeolodzy przedstawiają nam coraz dokładniejszy obraz szeregu wysoko rozwiniętych cywilizacji przeszłości. Historycy nauki i antropolodzy przytaczają wyniki badań ukazujące kształtowanie się pierwszych pojęć matematycznych (w szczególności liczby i figury) w kulturach pierwotnych[3], a następnie wskazują na wspaniałe osiągnięcia przedhistorycznych cywilizacji chińskiej, babilońskiej i egipskiej[4]. Dzięki ich pracy pośrednio możemy wnioskować o tym, że starożytnym cywilizacjom znany był spory zasób wiadomości matematycznych. Na rzecz tej tezy świadczą zabytki kultury materialnej (typu piramidy, mur chiński, systemy irygacyjne), sprawność w zarządzaniu złożonym organizmem państwowym (obliczanie i ściąganie podatków, utrzymywanie armii), ożywiony handel (udzielanie kredytów, naliczanie odsetek) oraz tworzenie różnego typu kalendarzy przez astronomów.

Kultura materialna i techniczna Egiptu w II tysiącleciu p.n.e. była bardzo wysoka. W warunkach skomplikowanego gospodarstwa, monumentalnego budownictwa, wyrafinowanych potrzeb elity rozwijać musiała się praktyczna arytmetyka i geometria. Niepodobna wyobrazić sobie wznoszenia imponujących budowli bez odmierzania, rysowania i sporządzania choćby prymi-

[1] Zob. T. Batóg: *Dwa paradygmaty matematyki.* Poznań 2000, s. 10.

[2] J. von Neumann: *The Works of the Mind.* Chicago 1947, s. 195.

[3] Zob. J. D. Barrow: II *razy drzwi,* tłum, z ang. K. Lipszyc. Warszawa 1996, rozdz. 2.

[4] Zob. A. P. Juszkiewicz (red.): *Historia matematyki,* t. 1. Warszawa 1975, s. 11-63.

tywnych szkiców. Powstanie umiejętności geometrycznych było ponadto uwarunkowane regularnymi wylewami Nilu, zacierającymi granice między posiadłościami i koniecznością sprawnego ich odtwarzania. Podobnie na terenie Mezopotamii każda panująca cywilizacja zmuszona była opanować praktyczną geometrię, aby wytyczać i utrzymywać rozległą sieć kanałów. Ponadto rozwinięty handel, rzemiosło, funkcjonowanie państwa wymagało istnienia grupy ludzi biegłych w rachunkach. W zakres ich umiejętności wchodziły przede wszystkim problemy arytmetyczne związane z praktycznymi potrzebami budownictwa i handlu.

Do bezpośrednich świadectw stanu zaawansowania wiedzy matematycznej należą, na przykład, tabliczki gliniane odnalezione w dolinie Tygrysu i Eufratu. Pokazują one, że w krajach starożytnego Wschodu nagromadzono wiele umiejętności typu matematycznego. Przykładowo wiemy, że Babilończycy operowali swobodnie pozycyjnym systemem numerycznym dotyczącym zarówno liczb całkowitych jak i ułamków (w systemie sześćdziesiętnym). Korzystali przy tym z licznych tablic wśród których, były tablice mnożenia, tablice odwrotności liczb naturalnych, tablice kwadratów i sześcianów. Dzięki takim pomocom astronomowie babilońscy umieli wyznaczać pozycje planet bez uciekania się do obrazów geometrycznych. Ruchy Słońca, Księżyca i planet oddawali za pomocą ciągów liczb. Babilońscy geometrzy i technicy posiadali dobrą znajomość wielu formuł zwykłej geometrii, w szczególności tych, które oddawały usługi przy obliczaniu powierzchni i objętości. Wiemy na przykład, że pitagorejskie właściwości boków trójkąta prostokątnego znane były Babilończykom na ok. tysiąc lat przed Pitagorasem.

Większość naszych wiadomości o dokonaniach matematycznych starożytnych Egipcjan pochodzi z „papirusu Rhinda czy papirusu moskiewskiego''[5]. Zawierają one przykładowe rozwiązania problemów rachunkowych jak i problemów geometrycznych. Wyszczególnione są drobiazgowo wszystkie potrzebne działania, ale pochodzenie stosowanych reguł nie jest objaśnione. Można przypuszczać, że proste zasady były wywodzone z doświadczenia, bardziej złożone sprowadzone były do prostych za pomocą pewnych operacji myślowych, ale nie było to formułowane w postaci ścisłej logicznej procedury. Stąd też bez żadnego rozróżnienia dokładne wyniki sąsiadują z przybliżonymi. Zdarza się, że u podstaw wyliczeń leżą fałszywe założenia, które niewątpliwie odrzuciłaby logika gdyby dokonano właściwej analizy. W konsekwencji wzory oraz zasady postępowania, z których tam się korzysta, są mieszaniną prawdy i fałszu. Jednak ogólnie rzecz biorąc dostarczają raczej prawidłowych odpowiedzi na te rodzaje problemów, z którymi mieli do czynienia Egipcjanie. Tak było chociażby z wzorem na pole dowolnego czwo-

[5] S. Kulczycki: Z *dziejów matematyki greckiej.* Warszawa 1973, s. 15.

J

rokąta, które Egipcjanie obliczali mnożąc średnią arytmetyczną jednej pary przeciwległych boków przez średnią arytmetyczną drugiej pary boków[6].

Także inne ośrodki starożytnej cywilizacji pozostawiły po sobie dowody rozległej wiedzy arytmetycznej i geometrycznej. W starożytnej cywilizacji chińskiej rozwinięte były wysoko umiejętności arytmetyczne i geometryczne. Zachowane dzieła chińskiej matematyki z II w. n.e. były niewątpliwie rezultatem osiągnięć uczonych wielu wcześniejszych stuleci, a nawet tysiącleci. O poziomie technik obliczeniowych Chińczyków niech świadczy fakt, że potrafili oni ustalić przybliżoną wartość liczby 7t (3,142704), która była lepsza niż słynne przybliżenie Archimedesa (3,1428)[7].

Metody pierwotnej arytmetyki i geometrii u wszystkich ludów starożytnych - Babilończyków, Egipcjan, Chińczyków i innych - świadczą o dużej pomysłowości i wyobraźni starożytnych, a stosowane tam procedury najwyraźniej dobrze służyły potrzebom techniki i handlu w tej epoce. Jednak ówczesna matematyka była jedynie zbiorem nieusystematyzowanych wzorów i zasad postępowania, z których niektóre dawały rezultaty poprawne, inne nie. Rozważania znalezione na tabliczkach babilońskich czy papirusach egipskich ograniczają się w zasadzie do rozwiązywania różnych, ale konkretnych (chociaż często dość skomplikowanych) zadań. Na ogół zawierają pedantyczny rejestr działań, które należy wykonać, aby uzyskać odpowiedź na postawione zagadnienie, ale nie zawierają nigdy wyjaśnień, dlaczego tak, a nie inaczej należy postępować

Wypada nadmienić, że w trwających przez wieki cywilizacjach egipskiej i babilońskiej stan wiedzy matematycznej nie ulegał większym przeobrażeniom. Umiejętności matematyczne ograniczone wymogami praktyki zastygły w pewnym schemacie, nie umiejąc się z niego wyrwać. Przekazywane z pokolenia na pokolenie te same wiadomości spowodowały stagnację tej dziedziny. „Matematyka praktyczna” ówczesnego okresu nie była żywa, nie potrafiła przezwyciężyć własnych ograniczeń i dokonać przejścia do kolejnego etapu rozwoju. Jest to o tyle zastanawiające, że przy tak długich okresach uprawiania matematyki w Babilonii, Egipcie, Chinach trudno wyobrazić sobie, że w tych cywilizacjach, które osiągnęły szczyty jeśli chodzi o sztukę, literaturę, kulturę materialną nie pojawiły się jednostki wybitne, które byłyby zdolne do syntezy zastanych wiadomości matematycznych w jakąś formę wiedzy teoretycznej. Jednak nic nie przemawia za tym, że starożytni Babilończycy, Egipcjanie lub Chińczycy uświadomili sobie potrzebę i podjęli jakąkolwiek systematyczną próbę wydzielenia i zbadania ogólnych reguł postępowania. Główną przyczyną tego stanu rzeczy - w moim przekonaniu-

[6] Zob. Tamże, s. 18.

[7] Zob. C. V. Newson: *Istota matematyki,* tłum, z ang. B. Stanosz. Warszawa 1967, s. 22.

jest fakt, że „matematyka” Egiptu i Babilonu ograniczała się do procedur typu algorytmicznego, czyli przedstawiania określonego sposobu postępowania zmierzającego do obliczenia poszukiwanej wielkości.

Jak widzimy, matematyka w okresie drugiego i pierwszego tysiąclecia p.n.e. przedstawia zadziwiającą mieszaninę sprawności obliczeniowej w arytmetyce (rozwiązywanie równań kwadratowych i szczególnych typów równań trzeciego stopnia) i geometrii (pola figur, objętości brył), ale retrospekcja pozwala dostrzec, że trzeba było czegoś więcej, zanim matematyka mogła stać się twórczą nauką - więc tym, czym jest współcześnie. W mojej opinii, osiągnięcia rachunkowe czy miernicze wspomnianych kultur nie są jeszcze matematyką samą, lecz umiejętnościami praktycznymi typu matematycznego. Ich główna zasługa dla rozwoju matematyki polegała na wypracowywaniu pojęć, które z czasem nabrały wymiaru matematycznego.

Badania historyczne wskazują, że wiedza matematyczna w Grecji na przełomie VII i VI w. p.n.e. była mniej więcej na tym samym poziomie co w Babilonii i Egipcie. Sytuacja zaczyna się gwałtownie zmieniać w IV w. p.n.e. Następuje gwałtowna przemiana w systemie wiedzy matematycznej. Można zadać pytanie: co sprawiło, że po takim długim okresie stabilności, bezruchu, bezwładu zbiór umiejętności typu matematycznego przekształcił się w stosunkowo krótkim czasie w naukę - matematykę?; co takiego właściwie się stało, że błyskawiczny (w skali historycznej) rozwój wiedzy matematycznej był możliwy i został zrealizowany?

Wydaje się, że w kulturze greckiej musiał w jakimś momencie dokonać się niespodziewany zwrot, dzięki któremu nasza matematyczna tradycja stała się nagle bez porównania bardziej twórcza niż we wszystkich pozostałych przypadkach. Żadna z pozostałych wielkich cywilizacji naukowych nie poszła podobną drogą. Być może to pozostałe cywilizacje rozwijały się „normalnie”, a tylko nasze dziedzictwo zawierało w sobie jakiś czynnik zakłócający, jakąś osobliwość, która zaowocowała wysoką efektywnością rozwoju matematyki. Grecy w stosunkowo niewielkim czasie przyswoili sobie i wspaniale rozwinęli osiągnięcia matematyczne wcześniejszych cywilizacji. Fakt ten jest o tyle zastanawiający, że istota „przejścia” od empirycznego stadium rozwoju matematyki do bardziej naukowego jej ujęcia leżała nie tyle w nowej treści, co w nowej formie dochodzenia do wiedzy. Wyjściowy materiał do budowy matematyki Grecy przejęli od poprzedników, lecz sposób przyswojenia go i wykorzystania był nowy.

Wiąże się to oczywiście ze skokiem jakościowym. Ten skok jakościowy, w moim przekonaniu, był możliwy dzięki filozofii, która w Grecji pojawiła się w VII wieku p.n.e. Filozofia była nowym sposobem pojęciowego ujmowania rzeczywistości. Przeciwstawiała ona, z jednej strony, mityczno-religijnej wizji świata, a z drugiej - praktycystycznemu pojmowaniu świata, postulat badania i tłumaczenia faktów na zasadzie przyczynowej, co zaowocowało dyskursywną metodą rozwijania wiedzy o świecie, metodą zachowującą rygory logicznego uzasadniania. Podkreślmy, przełom w myśleniu Greków nie był spowodowany zmianą przedmiotu zainteresowań (początkowo przedmiotem zainteresowań filozofii było to, co absorbowało uwagę Greków także wcześniej), ale zmianą podejścia poznawczego, czyli metodą filozofii.

Pod wpływem filozofii, a w szczególności zasady myślenia dyskursywnego (konieczności uzasadniania wygłaszanych tez) przeniesionej na grunt umiejętności matematycznych przekazanych przez wcześniejsze cywilizacje dokonało się przejście od poznania przedmatematycznego do matematycznego. Moment ten można nazwać „cięciem epistemologicznym”[8]. Oznacza on nieciągłe przejście od niższego do wyższego poziomu racjonalności, w wyniku którego matematyka przekroczyła rubikon teoretyczności. Zastosowanie dyskursywnej metody filozoficznej do umiejętności praktycznych typu matematycznych dało znakomity rezultat w postaci idei dowodu matematycznego. Właśnie dowód matematyczny był wyróżniającą i specyficzną cechą matematyki greckiej. Potrzeba dowodzenia nie pojawiała się we wcześniejszych kulturach, bowiem nie wymuszała tego technika (była rozwinięta na miarę potrzeb danych społeczności), ani próby stosowania matematyki (wzory Egipcjan i Babilończyków były wystarczająco dokładne).

Idea dowodzenia polegała na próbach uzasadniania, podawania motywacji i racji nawet dla tego, co było empirycznie znane. Już prawdopodobnie Tales, a na pewno Pitagoras, byli świadomi potrzeby dowodzenia formułowanych twierdzeń w taki sposób, „aby każdy zdrów na umyśle śmiertelnik mógł się nań zgodzić”[9]. Dzięki skoncentrowaniu się na problemie dowodzenia, matematycy w epoce antycznej coraz mniej interesowali się zastosowaniami. Matematyka zaczęła rozwijać się autonomicznie przekształcając się w naukę teoretyczną, w której dowód stał się jedyną instancją uprawomocniającą twierdzenia. Tak więc moment powstania matematyki jako nauki da się, według mnie, dosyć precyzyjnie określić. Można rzec, iż matematyka powstała wraz z pojawieniem się dowodu.

Niebagatelną rolę w tym procesie odegrał również unikatowy grecki wynalazek w dziedzinie społecznej, jakim był demokratyczny ustrój państwowy. Sprzyjał dyskusjom, a przez to wymuszał konieczność ustalania prawdziwego stanu rzeczy w celu przekonania oponentów[10]. Podobnie jak debaty polityczne czy wystąpienia publiczne w sądach, charakterystyczne

[8] Określenie L. Althussera.

[9] C. V. Newson: *Istota matematyki,* op. cit., s. 25.

[10] Zob. J. Waszkiewicz: *O problemie historycznych początki matematyki,* w: *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego,* Seria II: „Wiadomości Matematyczne” XXIX. 1 (1990), s. 109.

dla demokracji ateńskiej były polemiki i dysputy naukowe. Oponenci starali przekonać swych przeciwników za pomocą wnioskowania i racjonalnych argumentów, czasami poprzez wyszukiwanie w rozumowaniach przeciwników logicznych sprzeczności lub też wykazując, że z przyjętych przez nich przesłanek można wyprowadzić fałszywe wnioski. Wszystkie te sposoby argumentowania znalazły zastosowanie na gruncie matematyki.

Konkretne formy dowodzenia były wypracowywane na gruncie filozofii greckiej. Choć wcześniej w Egipcie i Babilonie również znano wiele faktów matematycznych, to dopiero pod wpływem filozofii greckiej pojawiła się tendencja do systematyzacji tych faktów. Tradycja przekazuje, że Tales był jakby „łącznikiem" między matematyką empiryczną, gdyż skupił uwagę na figurze geometrycznej jako takiej i zastanawiał się świadomie jakie ma ona własności. Proklos[11] przekazuje, że Tales dowiódł, iż średnica dzieli koło na połowy, kąty u podstawy trójkąta równoramiennego są równe, kąty naprzemianległe przy przecinaniu prostych równoległych są równe. Jak się wydaje, stosował on najprostszy typ dowodu - z oczywistości, poprzez nakładanie przez symetrię odpowiednich fragmentów rozpatrywanych figur.

Ważna dla ukształtowania się matematyki jako nauki była koncepcja Parmenidesa, który nie akceptował budowania wiedzy na podstawie obserwacji świata zjawiskowego, lecz na dedukcjach, w których kierował się odkrytymi przez siebie prawami logiki: tożsamości i niesprzeczności. Idea Parmenidesa zastosowana do matematyki przez pitagorejczyków i ich antycznych następców pozwoliła uczynić z matematyki wiedzę niepoglądową, opartą jedynie na przyjętych założeniach oraz regułach wyprowadzania jednych zdań z innych. Elejski ideał nauki apriorycznej w pośredni sposób wpłynął na powstanie brzemiennych w następstwa i konsekwencje pojęć matematycznych, mianowicie pojęcia nieskończoności i ciągłości. Zenon z Elei, broniąc teorii „bytu" jako jedynie rzeczywistego i niezmiennego, występuje głównie przeciwko dwóm przeciwstawnym nauce Parmenidesa poglądom postulującym wielość bytu oraz istnienie ruchu.

Rozumowania Zenona wkroczyły w kwestię poznania matematycznego związanego z pojęciami: nieskończoności i ciągłości. Wiele przekonań matematycznych (typu: odcinek składa się z punktów) w świetle wystąpienia Zenona należało uznać za sprzeczne. Uważano przykładowo, że odcinek jest nieskończenie podzielny oraz składa się z nieskończonej liczby punktów. Zenon zauważył, że jeśli punkt będzie uważany za nierozciągły, to odcinek będzie także pozbawiony wielkości; natomiast jeśli dopuścić nieskończony podział odcinka na dowolnie małe ale jednak rozciągłe wielkości, to odcinek będzie wielkością nieskończoną. Zenon doprowadził do tego, że ważne

[11] Zob. Tamże, s. 100-101.

filozoficzne pytania o naturę „bytu” takie jak, natura nieskończoności, stosunek między ciągłością i nieciągłością zostały przeniesione na grunt matematyki, co stało się stymulatorem dalszego rozwoju matematyki.

Ze szkoły elejskiej wyszedł impuls w postaci ciekawej idei dowodu. Chodzi o tak zwane dowodzenie pośrednie. Dowodzenie pośrednie odpowiadało wysokim wymogom ścisłości, gdyż polegało ono na ustanowieniu wewnętrznych logicznych związków między matematycznymi zależnościami, a nie na sprowadzeniu ich do pewnych zmysłowych obrazów. Nie dowodzi się samego twierdzenia, ale obala się twierdzenie przeciwne. Aby przystąpić do dowodu pośredniego pewnego stwierdzenia należy wpierw sformułować stwierdzenie jemu przeciwne, a następnie dowodzić absurdalności tego ostatniego. Wyłoniwszy twierdzenie przeciwne do dowodzonego staramy się wyprowadzać z niego wnioski do tej pory, aż dojdziemy do sprzeczności miedzy wywodem a punktem wyjściowym. Ta sprzeczność pokazuje, że twierdzenie, z którego ona wynika, jest nieprawdziwe. Takie postępowanie otworzyło drogę do stosowania przez pitagorejczyków dowodu przez sprowadzanie do absurdu.

Szerokie wykorzystywanie metody dowodu pozwoliło na przekroczenie empirycznego etapu rozwoju matematyki (okresu jeszcze właściwie przedmatematycznego), co wyrażało się (wiązało się) z porzuceniem jej pierwotnych praktycznych celów na rzecz czystego dążenia do prawdy. I w tym momencie rozpoczyna się matematyka. Od kiedy jej głównym celem przestają być zastosowania praktyczne, uwaga uczonych (filozofów) skupia się i wyczerpuje na badaniu relacji między tezami matematycznymi, rozbudowie struktury matematyki jako celu samego w sobie. Rozwijająca się, początkowo w ramach filozofii, matematyka wkrótce staje się nauką w pełni samodzielną posiadającą swój przedmiot i metodę. Przedmiotem matematyki greckiej były liczby naturalne i ich własności oraz wzajemne relacje, a także obiekty geometryczne: punkty, linie, okręgi, płaszczyzny i relacje zachodzące między nimi. Swój wspaniały rozwój zawdzięcza ona, poza wpływami filozoficznymi, inspiracjom natury religijnej[12]. Mam tu na myśli wpływy swoiście pitagorejskie.

W doktrynie pitagorejczyków można wyróżnić dwie strony: praktyczną i teoretyczną. Celem życia pitagorejczyków było wyzwolenie duszy. Pitagoras uczył, że dusze ludzkie oczyszcza i uwzniośla muzyka oraz oddanie się studiowaniu liczb, figur geometrycznych i ciał niebieskich. Polegało to na wypełnianiu określonego kodeksu moralnego, w którym poczesne miejsce przypisano zajmowaniu się muzyką i matematyką, co miało oczyszczać

[12] Zob. J. Mrozek: *Przyczynek do engelsowskiego traktowania genezy matematyki.* „Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Gdańskiego - Filozofia i Socjologia” nr 15. Gdańsk 1992, s. 147.

i oswobadzać duszę z okowów ziemskich. Spekulacjom mistycznym przypadła więc rola stymulatora zainteresowań starożytnych, co - poprzez skierowanie ich na rozważania o liczbach - doprowadziło do niespotykanego wcześniej rozwoju matematyki. Liczba była początkowo wiązana ze zbiorem przedmiotów konkretnych. Impuls mistyczny dany badaniom nad tym pojęciem przez pitagorejczyków, doprowadził do operowania liczbami w oderwaniu od obiektów materialnych oraz zapoczątkował autonomiczne zainteresowanie się liczbami jako takimi. Wyrażało się to początkowo w przypisywaniu liczbom pewnych indywidualnych cech metafizycznych. Pojmowano je jako byty uniwersalne, do których zamierzano sprowadzić nie tylko wszystkie matematyczne konstrukcje, ale i wszystkie zjawiska rzeczywistości. Nie chodziło o ilościową interpretację rzeczywistości, a raczej właśnie o spekulacje, w których liczby traktuje się jako istotę rzeczy - coś w rodzaju (lub na podobieństwo) „duszy" przedmiotów.

Działalność naukowa Pitagorasa i jego uczniów obejmowała wiele dziedzin, ale ogniskowała się na arytmetyce. Obiektami zainteresowania pitagorejczyków stały się przede wszystkim liczby ciągu naturalnego i rozpatrywanie pewnych własności arytmetycznych (np. parzystość, nieparzystość, podzielność). Tak więc przedteoretyczne, pierwotne pojęcia o wymiarze empirycznym dzięki spekulacjom mistycznym zyskują ogólniejszy, bardziej abstrakcyjny charakter. I ten moment jest, według mnie, najistotniejszy. Można bowiem spotkać opinie, że Babilończycy przewyższali Greków jeśli chodzi o posługiwanie się liczbami. Rzeczywiście, znane pisma pitagorejczyków nie zawierają żadnych trudniejszych obliczeń i żadnych wiadomości o posługiwaniu się liczbami ogólnymi większymi niż dziesięć. Jednak przy całej wrodzonej zdolności do rachunków Babilończykom brakuje tej metody logicznego rozumowania, która charakteryzuje Pitagorasa. Różnicę między Babilończykami a Grekami najlepiej oddaje postawa każdej z cywilizacji do pierwiastka kwadratowego z dwóch. Babilończycy obliczali go z wielką dokładnością. Grecy dowiedli, że jest to liczba niewymierna[13].

Taki punkt widzenia współgrał z pojmowaniem matematyki przez pitagorejczyków, odwołujących się do reguł wnioskowań dedukcyjnych, a nie do przykładów - rysunków itp. Pitagoras przeprowadził ostrą granicę między matematyką teoretyczną a jej zastosowaniami. Bujny rozwój matematyki tamtego okresu był zasługą oderwania się teoretycznych badań od praktycznych zastosowań. Trudno powiedzieć jak wyglądały przedstawiane przez pitagorejczyków dowody. Niektóre z nich mogły być takie, jakie znajdujemy w *Elementach,* niektóre zaś inne. Wiadomo, że pitagorejczycy uznawali dowodzenie twierdzeń za niezbędne i dążyli do wyeliminowania z procedury

[13] Zob. D. J. de Solla Price: *Węzłowe problemy historii nauki,* tłum. z ang. H. Krahelska. Warszawa 1965, s. 20.

dowodowej odniesień do intuicji. Dowód, według nich, odsłaniał istotę twierdzenia, podnosił jego wartość, ale też podlegał osądowi, co pozwalało eliminować niejasności i błędy. Pitagorasowi przypisuje się ponadto dostrzeżenie potrzeby definiowania pojęć matematycznych, a dzięki Sokratesowi problem definiowania przejęli Platon i Arystoteles. Tak więc zainteresowanie starożytnych Greków matematyką wypływało także z uznania, jakim obdarzyli ją filozofowie oraz ze znaczenia, jakie przypisywali jej dla filozofii.

Także z obszaru filozofii wypłynęło ważne dla matematyki rozróżnienie pojęcia nieskończoności na *nieskończoność aktualną i potencjalną*. Rozróżnienie to pochodzi od Arystotelesa. Arystoteles nie podał żackiej definicji nieskończoności zarówno potencjalnej jak i aktualnej. Podał tylko przykłady jednej i drugiej. Nieskończoność potencjalną pojmował jako coś (pewną wielkość), co w danym momencie zawiera skończenie wiele elementów, ale może być dowolnie powiększane w sposób ogólnie zrozumiały. Natomiast nieskończoność aktualna stanowi coś „gotowego" danego od razu jako całość. Nie jest czymś dynamicznym. Jest to wielkość, która składa się rzeczywiście z nieskończonej ilości elementów.

Według Arystotelesa, przyjęcie istnienia nieskończoności aktualnej prowadzi do paradoksów. Przeczy na przykład wyznawanej przez starożytnych zasadzie: całość jest większa od części. Dlatego Arystoteles wykluczył istnienie nieskończoności aktualnej, a uznał za jedyną możliwą do przyjęcia nieskończoność potencjalną. Argumentował przy tym, że matematykom do uprawiania ich dziedziny całkowicie wystarczy posługiwanie się nieskończonością potencjalną. W *Fizyce* napisał on: „pogląd nasz nie pozbawia bynajmniej matematyków ich teorii przez odrzucenie aktualnego istnienia nieskończoności (...) bo w rzeczywistości niepotrzebna im jest nieskończoność ani też z niej nie korzystają. Posługują się natomiast dowolnie wielkimi liczbami, ale skończonymi. Podział dokonany na największej wielkości może być przeprowadzony w tej samej proporcji na każdej innej wielkości"[14]. Arystotelesowskie rozróżnienie na nieskończoność potencjalną i aktualną weszło na stałe do instrumentarium pojęciowego matematyki.

Rozwój matematyki byłby niemożliwy bez głębszej refleksji nad naturą bytów matematycznych i samej matematyki jako nauki, która pojawiła się w filozofii greckiej. To Platon u wejścia do swej Akademii umieścił napis: *niech nie wchodzi tu ten, kto nie zna zasad geometrii* (matematyki) a jednocześnie był jednym z pierwszych, którzy postawili pytanie: co jest przedmiotem matematyki? To pytanie przyczyniło się do uświadomienia sobie przez matematyków specyficznej natury bytów matematycznych i oderwania matematyki od praktycznych zadań. Platon bowiem uważał, że wiedza pojęcio-

[14] Arystoteles: *Fizyka,* tłum. K. Lesniak, księga III. Cyt. za R. Murawski: *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych.* Poznań 1994, s. 40.

wa, poznawczo wartościowa nie jest wiedzą o zmiennym świecie zjawiskowym, ale dotyczy bytu idealnego, w związku z czym był przekonany o istnieniu niezależnych od umysłu pozaczasowych i pozaprzestrzennych idei arytmetycznych i geometrycznych.

Zarówno Platon jak i Arystoteles (pomijając różnice szczegółowych rozwiązań) wiedzieli, że poznanie matematyczne musi opierać się na pewnych aktach poznawczych dostarczających matematyce prawdziwych założeń i pierwszych zasad. Zatem świadomi byli, że wszystkiego nie można dowodzić bez popadania w błędne koło. Metoda dowodu - jako procedura uzasadniania prawdziwości - wymagała wskazania podstawy uzasadnienia. Początkowo kryterium prawdziwości założeń i aksjomatów oraz prawidłowości[15] reguł dowodu była ich oczywistość.

Platonowi- choć sam nie zajmował się matematyką- przypisuje się to, że był pierwszym teoretykiem metody aksjomatyczno-dedukcyjnej. Według Platona do pierwotnych prawd, dotyczących świata matematycznego dochodzimy dzięki poznaniu bezpośredniemu zwanemu *noein,* czyli myśli intuicyjnej. Myśl intuicyjna jest aktem umysłu działającego samodzielnie i z samowiedzą. Do prawd pochodnych dochodzimy dzięki myśli dyskursywnej *dianoein,* która umożliwia poznanie pośrednie. A więc dla Platona poznanie matematyki jest wyłącznie poznaniem rozumowym i apriorycznym.

Metoda ta znalazła pełne rozwinięcie w systemie nauki Arystotelesa, który jako pierwszy przestawił ogólną koncepcję nauki jako systemu aksjomatyczno-dedukcyjnego. Opracował też w miarę kompletną teorię zdań asertorycznych, opartą na dwóch trybach (*Barbara*, *Celarent*) jako aksjomatach. W koncepcji Arystotelesa pierwsze zasady i założenia matematyki są wywodzone z doświadczenia dzięki niedyskursywnej operacji intelektualnej nazywanej *apagoge*, polegającej na „dostrzeżeniu" w konkrecie (bycie jednostkowym) czegoś ogólnego (abstrakcyjnego).

Podsumowując: matematyka przejęła od filozofii metodę (dyskursywną- racjonalne uzasadnianie), cel (czysto poznawczy a nie praktyczny), metodologię (metodę aksjomatyczną). Zasady propagowane przez filozofię w osobach jej najwybitniejszych przedstawicieli Platona i Arystotelesa najpełniejszy wyraz znalazły właśnie w najdoskonalszym dziele matematycznym starożytnej Grecji - *Elementach* Euklidesa. Jest ono podsumowaniem trzystu lat działalności matematyków greckich. Krzyżują się w nim zarówno wpływy platońskie jak i arystotelesowskie. Euklides, budując swą aksjomatykę geometrii, wzorował się na metodzie aksjomatycznej zawartej w filozofii Platona, a także na koncepcji systemu aksjomatyczno-dedukcyjnego przedstawionego na wiek przed ukazaniem się *Elementów* przez Arystotele-

[15] Por. J. Woleński: *Metamatematyka a epistemologia,* Uwaga 5. Warszawa 1993, s. 172.

sa. Dzięki zastosowaniu metodologii Arystotelesa *Elementy* stały się wzorcem wykładu naukowego, ustanowiły pewien model i standard dla innych teorii matematycznych aż do XIX wieku.

Streszczenie

Badania genezy matematyki są bardzo doniosłe dla zrozumienia jej istoty. W popularnych opracowaniach tego problemu często upraszcza się to zagadnienie, wskazując jedynie na empiryczną proweniencję pojęć matematycznych. Autor stara się skorygować tę opinię poprzez ukazanie wielowymiarowości oddziaływań, które przyczyniły się do powstania matematyki. Oprócz wpływów empirycznej praktyki mierniczej i rachunkowej kultur przedgreckich, autor prezentuje wpływ na genezę matematyki: greckich idei filozoficznych, greckiego systemu społecznego oraz inspiracji natury religijnej. Decydujące dla ukształtowania się matematyki jako odrębnej dyscypliny teoretycznej okazały się idee filozoficzne starożytnej Grecji. Matematyka bowiem przejęła od filozofii: *metodę* (dyskursywną - racjonalne uzasadnianie), *cel* (czysto poznawczy, a nie praktyczny), oraz *metodologię* (metodę aksjomatyczną rozwoju teorii - *Elementy* Euklidesa).

Summary

The research into the genesis of mathematics is essential condition for the understanding of the nature of mathematics. Popular approaches to this problem frequently simplify this issue, indicating only the empirical origin of mathematics notions. The author attempts to correct such opinion by showing the 'multidimensionality' of interactions which contributed to the origin of mathematics. Together with the impact of empirical measuring and calculational practice of the cultures prior to the Greek one, author presents the impact, on genesis of mathematics, of: Greek philosophical ideas, Greek political system and inspirations of religious character. The philosophical ideas of ancient Greece appeared to be essential for shaping mathematics as a separate theoretical discipline. Mathematics has adopted from philosophy: *the method* (discursive - rational justification), *aim* (purely cognitive), and *methodology* (axiomatic method of developing a theory -Euclid's *Elements*).