EDUKACJA FILOZOFICZNA
Vol. 33 2002

KRZYSZTOF WÓJTOWICZ
Uniwersytet Warszawski

KONCEPCJA FIKCJONALIZMU MATEMATYCZNEGO HARTRY'EGO FIELDA[1]

Jednym z najszerzej w ostatnich latach dyskutowanych stanowisk antyrealistycznych w filozofii matematyki jest koncepcja fikcjonalizmu matematycznego Hartry'ego Fielda, przedstawiona w jego [Field 1980], zaś komentowana i modyfikowana w pracach z tomu [Field 1989] (który zawiera również wiele odpowiedzi na zarzuty krytyków Fielda). Celem tego artykułu jest prezentacja koncepcji Fielda, zaś w artykule [Wójtowicz 2002] (stanowiącym kontynuację niniejszej pracy) zostanie ona poddana krytycznej analizie.

1. Zasadnicze cechy doktryny Fielda. W monografii [Field 1980] autor broni pewnej wersji stanowiska nominalistycznego w filozofii matematyki. Według niego, obiekty abstrakcyjne (w szczególności matematyczne) nie istnieją, zaś teorie matematyczne są pozbawione przedmiotowego odniesienia i stanowią jedynie użyteczne narzędzia – wygodne w użyciu fikcje. Zdania matematyczne nie wyrażają zatem prawd na temat rzeczywistości. Ich rola jest inna: matematyka pełni bowiem jedynie rolę narzędzia, bez którego konstrukcja teorii fizycznych byłaby trudniejsza i bardziej żmudna, ale jednak możliwa.

Zwolennicy stanowiska realistycznego często w swej argumentacji wychodzą od faktu stosowalności matematyki przy opisie świata. Field także uważa zagadnienie stosowalności za centralne zagadnienie filozofii matematyki, do którego powinna się odnieść każda spójna koncepcja. Analiza problemu musi przy tym wychodzić od stanu faktycznego, więc praktykę matematyczną należy traktować *at face value* – Field nie proponuje więc bynajmniej „reformy" matematyki[2]. Odrzuca on przy tym koncepcje, w myśl których matematyka jest nauką o obiektach językowych lub stanach mentalnych – twierdzi bowiem, że trudno jest wówczas o podanie zadowalającego wyjaśnienia stosowalności matematyki w naukach empirycznych. Wyjaśnienie Fielda zasadniczo opiera się na tezie, iż własnością matematyki, która umożliwia zastosowanie jej w charakterze narzędzia użytecznego przy opisie świata nie jest bynajmniej jej prawdziwość, lecz tzw. nietwórczość. Według Fielda, jest to własność jedynie nieco silniejsza od niesprzeczności, ale „odległa" od prawdziwości.

Według Fielda, najpoważniejszym (i zarazem jedynym naprawdę znaczącym) argumentem na rzecz stanowiska realistycznego w odniesieniu do matematyki jest argument z niezbędności (*indispensability argument*) Quine'a. Celem Fielda jest podważenie tego argumentu, gdyż będzie to zarazem podważenie realistycznej koncepcji matematyki.

Argument z niezbędności (sformułowany – dla czytelności – na konkretnym przykładzie teorii funkcji rzeczywistych) ma następującą strukturę[3]:

(1) Teoria funkcji rzeczywistych odnosi się do pewnych abstrakcyjnych obiektów, takich jak liczby rzeczywiste. Każdy, kto uważa zdania tej teorii za literalnie prawdziwe, zobowiązany jest więc do uznania istnienia tych obiektów.

(2) Teoria funkcji rzeczywistych jest niezbędna w fizyce[4] – fizyka nie może być uprawiana bez posługiwania się tą teorią.

(3) Fizyka stanowi prawdziwy opis rzeczywistości.

(4) Teorie fizyczne winny być postrzegane i analizowane jako pewna całość. Nie jest możliwe wyróżnienie w teoriach fizycznych składnika czysto konwencjonalnego. Teorie te są potwierdzane (lub odrzucane) jako pewne całości – i poszczególne zdania tych teorii także zyskują empiryczne potwierdzenie jako fragmenty tej całości.

(5) Skoro teoria funkcji rzeczywistych jest niezbędna w fizyce, to każdy, kto uważa, że fizyka stanowi prawdziwy opis rzeczywistości, winien uznać za prawdziwe wszystkie występujące w niej zdania – a więc także zdania teorii funkcji rzeczywistych.

(6) A zatem istnieją liczby rzeczywiste[5].

Field stara się podważyć nie tyle sam sposób wnioskowania właściwy dla argumentu z niezbędności („stosowalność implikuje istnienie"), ale przesłanki tego argumentu. Krótko mówiąc, Field stara się wykazać, że nie jest prawdą, iż we współczesnej fizyce (czy ogólniej – w nauce) techniki matematyczne są niezbędne. Odrzuca zatem przesłankę (2). Według Fielda możliwe jest stworzenie teorii posiadających taką samą siłę eksplanacyjną, równie dobrze opisujących rzeczywistość jak obecnie istniejące teorie fizyczne, ale w których nie będą występowały odwołania do obiektów matematycznych. Tym samym wykazana zostanie fałszywość przesłanki (2) argumentu z niezbędności i cały argument upadnie. Jest to – według Fielda – jedyna możliwa do zaakceptowania metoda obrony przed argumentem z niezbędności. Konieczne jest więc wykazanie, że możliwe jest uprawianie nauki w oparciu o „nominalistyczne zasoby".

Odrzucenie przesłanki (2) ma się więc opierać na wykazaniu, że możliwe jest podanie jakościowych[6] (nominalistycznych) wersji teorii fizycznych. Jego rekonstrukcja ma siłą rzeczy ograniczony zasięg – nie jest oczywiście możliwe zrekonstruowanie <u>całej</u> fizyki w ramach jednej monografii. Field rozwija więc jedynie nominalistyczną wersję teorii grawitacji Newtona, traktując ją niejako jako paradygmatyczny przykład, jako pierwszy krok w programie nominalizacji nauki, którego przeprowadzenie jest konieczne dla wykazania fałszywości stanowiska realistycznego.

Field nie neguje oczywiście faktu istnienia zastosowań matematyki w fizyce. Przyznaje, iż matematyka jest nie tylko użyteczna, ale nawet – z czysto praktycznego punktu widzenia – niezbędna. Ta niezbędność ma jednak inny charakter niż niezbędność, o której mówi argument Quine'a: ma charakter jedynie praktyczny, a nie zasadniczy. Status obiektów matematycznych w fizyce jest inny, niż status obiektów teoretycznych. Teorie, w których mowa jest o obiektach teoretycznych, są bowiem twórczymi rozszerzeniami teorii czysto obserwacyjnych i pozwalają na istotne wzbogacenie wiedzy. Inaczej jest w wypadku obiektów matematycznych. Przy użyciu teorii matematycznej nie można bowiem uzasadnić więcej zdań dotyczących rzeczywistości fizycznej niż w samej tylko teorii jakościowej, w której nie występują terminy matematyczne.

W ogólnym wypadku stwierdzenie takie byłoby tautologią. Gdyby bowiem język J_F teorii fizycznej T_F i język J_M teorii matematycznej T_M byłyby rozłączne, to jest oczywiste, że dołączenie dodatkowych założeń matematycznych T_M wyrażonych w języku J_M (założeń dotyczących nowej klasy obiektów – obiektów matematycznych)[7] nie dostarcza żadnych nowych wniosków w języku J_F. (Pomijam tu trywialny przypadek, kiedy T_M jest teorią sprzeczną, a więc z $T_F \cup T_M$ wynikać będą wszystkie zdania języka $J_F \cup J_M$.) Aby dołączenie nowych założeń do teorii T_F pozwoliło na wyciągnięcie nowych wniosków, konieczne jest oczywiście dołączenie także pewnych dodatkowych założeń wyrażających zależności pojęciami teorii T_F i T_M (a w „stylizacji semantycznej": relacji pomiędzy obiektami stanowiącymi przedmiot opisu teorii T_F i T_M). Obok „czystych" obiektów abstrakcyjnych (*pure abstract entities*), musimy także założyć istnienie złożonych (*impure*) obiektów abstrakcyjnych, np. takich jak np. funkcje ze zbioru obiektów fizycznych w obiekty ściśle abstrakcyjne. Dzięki temu założeniu możemy sformułować tzw. prawa pomostowe (*bridge laws*), które opisują relacje pomiędzy obiektami fizycznymi a obiektami matematycznymi. Jeśli klasę tych założeń oznaczymy np. przez T_{FM}, to uzyskana „mieszana" teoria $T_F \cup T_M \cup T_{FM}$ (w której mowa zarówno o obiektach fizycznych, jak i o czystych i złożonych obiektach abstrakcyjnych) będzie zawsze nietwórczym rozszerzeniem teorii jakościowej T_F: nie pozwala na udowodnienie żadnych twierdzeń jakościowych niedowodliwych w teorii jakościowej. Zasada ta – w swobodnym sformułowaniu – ma następującą postać [Field 1980,12]:

(C): Niech S będzie teorią matematyczną, N teorią jakościową, α-zdaniem nominalistycznym. Jeśli α^* nie jest konsekwencją N^*, to α^* nie jest konsekwencją N^*+S[8].

Oto podane przez Fielda uzasadnienie tej zasady:

Załóżmy, że z teorii N* nie wynika α* (czyli nieprawda, że N*$\Rightarrow\alpha$*)[9]. Zatem teoria N*+$\neg\alpha$* jest niesprzeczna. Mogłoby się zdarzyć, że tak właśnie jest, tzn., że taki jest stan świata. Jeżeli jednak N*+S$\Rightarrow\alpha$* , to wówczas prawdziwość teorii matematycznej S zależałaby od stanu świata, co jest sprzeczne z faktem, że teorie matematyczne są prawdziwe *a priori*, a zatem we wszystkich możliwych światach. Nie może zatem mieć miejsca wynikanie N*+S$\Rightarrow\alpha$* Teoria N*+S musi więc być nietwórczym rozszerzeniem teorii N*[10].

To uzasadnienie można nazwać uzasadnieniem filozoficznym. Należy tu podkreślić, że Field, odwołując się do „prawdziwości matematyki we wszystkich możliwych światach" dokonuje jedynie pewnego rodzaju myślowego eksperymentu. Sam bowiem jest antyrealistą, przekonanym o fałszywości zdań matematyki. Stawia się tu jednak w roli realisty, próbując niejako „od wewnątrz" wykazać bezzasadność stanowiska realistycznego. Field nie ogranicza się jednak do tego typu argumentacji podając także formalną wersję argumentu na temat nietwórczości matematyki. Podaję ją za Fieldem (nieco zmieniając oznaczenia).

ZFC oznacza teorię mnogości Zermelo-Fraenkla, ZFU – wersję z atomami. Dla dowolnego słownika (tj. zbioru wyrażeń pozalogicznych) V, przez ZFU_V oznaczać będziemy teorię mnogości, w której schemat aksjomatów wyróżniania obejmuje wszystkie formuły w języku $V\cup\{\in\}$ (czyli formuły utworzone za pomocą predykatu '$\in$' oraz słownika V). Dla dowolnej teorii T, przez ZFU(T) oznaczać będziemy teorię $ZFU_{V(T)}$, gdzie V(T) oznacza słownik teorii T. Okazuje się, że prawdziwa jest następująca zasada:

(C_0) Jeśli T jest niesprzeczna, to ZFU(T)+T* też jest niesprzeczna [Field 1980, 17].

Wynika stąd, że ZFU(T)+T* jest nietwórczym rozszerzeniem teorii T. Zasada ta, w nieco innej wersji, ma postać:

(C_1) Jeśli T jest teorią, której niesprzeczność jest dowodliwa w ZFC, to ZFU(T)+T* jest niesprzeczna [Field 1980, 18].

Wynika stąd, że można – w charakterze narzędzia – posługiwać się teorią mnogości. Należy tutaj zauważyć, że Field, uzasadniając tezę o nietwórczości matematyki, odwołuje się w swej argumentacji do pojęć teoriomnogościowych. A zatem, aby wykazać, że matematyka jest nietwórcza w stosunku do teorii fizycznych, Field odwołuje się do twierdzeń teorii mnogości (tzn. twierdzeń umożliwiających wykazanie istnienia modelu dla odpowiedniej teorii klasycznej). Dowód nietwórczości matematyki opiera się zatem na założeniach matematycznych, które Field jawnie odrzuca. Field odpowiada na ten zarzut twierdząc, że nie stanowi to problemu, gdyż traktuje on swoją argumentację jako swoiste *reductio ad absurdum* argumentu Quine'a. Schemat argumentu Fielda jest więc następujący: jeśli założymy prawdziwość matematyki, wówczas możemy wykazać, że nie jest ona niezbędna w nauce, tym samym podważając jedyny argument na rzecz prawdziwości matematyki. W takiej sytuacji „*platonizm zostaje pozbawiony podstaw: implikuje on bowiem niemożność swojego uzasadnienia*" [Field 1980, 6]. Celem Fielda nie jest więc podanie argumentu pozytywnego na rzecz nominalizmu. Sam deklaruje otwarcie, iż w jego monografii nie ma argumentów pozytywnych na rzecz stanowiska nominalistycznego, zaś jego celem jest raczej podważenie najważniejszych argumentów negatywnych przeciwko stanowisku nominalistycznemu [Field 1980, 5].

Zasadniczym problemem, jaki musi zostać wyjaśniony w fikcjonalistycznej koncepcji Fielda jest wyjaśnienie zagadnienia zastosowań matematyki w naukach empirycznych. Zasadniczą rolę odgrywa tutaj zasada nietwórczości, zaś sam mechanizm ma następująca postać: aby zastosować teorię matematyczną należy utworzyć abstrakcyjne odpowiedniki (*abstract counterparts*) zdań nominalistycznych: „*kluczem do stosowania teorii matematycznej S jako narzędzia w wyciąganiu wniosków z teorii nominalistycznej N jest wykazanie w teorii N*+S rownowaznosci zdań z N* z pewnym innym zdaniem (będę je nazywał abstrakcyjnym odpowiednikiem zdania z N*), w którym kwantyfikacja odbywa się po obiektach abstrakcyjnych*" [Field 1980, 20]. Schemat zastosowania matematyki jest więc następujący:

(1) Dla dowolnego zdania nominalistycznego $\varphi \in L_N$ teorii N tworzymy jego abstrakcyjny odpowiednik $\varphi^a \in L_{N+S}$ (gdzie S jest teorią matematyczną sformułowaną w języku L_S, zaś N+S jest teorią „mieszaną").

(2) W teorii N+S dowodzimy równoważności $\varphi \Leftrightarrow \varphi^a$. Dzięki istnieniu tego typu równoważności między zdaniami teorii T_N a ich abstrakcyjnymi odpowiednikami, możliwe będzie korzystanie z wyników teorii matematycznej S.

(3) Mechanizm wyprowadzania nowych wniosków z przesłanek jest następujący: przypuśćmy, że dane są jakościowe przesłanki $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Tworzymy ich odpowiedniki $\varphi_1^a, \ldots, \varphi_n^a$. Następnie, w teorii N+S dowodzimy, iż $(\varphi_1^a \wedge \ldots \wedge \varphi_n^a) \Rightarrow \psi^a$, gdzie ψ^a jest abstrakcyjnym odpowiednikiem jakościowego zdania ψ. Ponieważ jednak – na mocy teorii N+S – ma miejsce równoważność $\psi \Leftrightarrow \psi^a$, więc wnioskujemy stąd zdanie ψ.

(4) Korzystając z teorii N+S wykazaliśmy, że z przesłanek $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ wynika zdanie ψ. Co więcej, ponieważ matematyka jest nietwórcza względem fizyki, wniosek ψ może być wyprowadzony z przesłanek $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ na gruncie samej tylko teorii jakościowej N.

Według Fielda, nietwórczość stanowi cechę charakterystyczną „dobrej" matematyki – „*odkrycie, że akceptowana obecnie matematyka nie jest nietwórcza, byłoby odkryciem, że nie jest dobra*" [Field 1980, 13]. Z faktu, że każda dobra teoria matematyczna jest nietwórcza wynika, że nie ma znaczenia, jakiej teorii matematycznej użyjemy w naszych rozumowaniach; jedynym warunkiem jest to, aby spełniała ona zasadę nietwórczości **(C)**. W szczególności np. teorie ZFC, ZFC+CH, ZFC+ $\neg$ CH[11] są równoważne ze względu na ich jakościowe konsekwencje. Może się jedynie zdarzyć, że któraś z nich będzie bardziej użyteczna. Prowadzenie rozumowań w teorii matematycznej jest wskazane ze względu na ekonomię myślenia, jednak uzyskane wnioski jakościowe będą zawsze takie same.

Sam fakt nietwórczości matematyki nie upoważnia jednak do uznania, że matematyka jest w fizyce zbędna (i tym samym nie stanowi argumentu kończącego polemikę z argumentem z niezbędności). Field zauważa bowiem, że zasada nietwórczości pozwala jedynie na uzasadnienie zdania warunkowego: gdyby istniała odpowiednio dobra teoria jakościowa, to wówczas wiadomo byłoby, że można (bez zaciągania zobowiązań ontologicznych) posługiwać się matematycznymi narzędziami – uzyskując jedynie wnioski, które można uzyskać też w teorii jakościowej. Konieczne jest jednak jeszcze wykazanie, że w ogóle taką teorię jakościową można sformułować. W przeciwnym razie zasada nietwórczości będzie wprawdzie spełniona („w pusto" – gdyż po prostu nie istnieją żadne teorie jakościowe), lecz nie będzie z niej bynajmniej wynikać zbędność teorii matematycznych.

Oczywiście, podstawowym warunkiem, jaki musi spełniać konstruowana teoria jakościowa jest to, aby pozwalała na wyprowadzenie tych samych wniosków (chodzi tu o wnioski sformułowane w języku jakościowym) co teoria klasyczna. Jednak nie każda teoria jakościowa, z której wynikają te same wnioski jakościowe co z teorii klasycznej może zastąpić klasyczną wersję. Najprostszy bowiem przykład takiej teorii jakościowej to po prostu teoria T składająca się z wszystkich tych zdań $\alpha \in L_N$, które są wnioskami z teorii klasycznej N+S (czyli teoria $T = L_N \cap Cn(N+S)$). Taka teoria nie jest jednak atrakcyjna teoretycznie. Jest sztucznym tworem, nie odzwierciedla praktyki naukowej, porządku logicznego ani historycznego tworzenia się pojęć naukowych. Teoria jakościowa, o której mowa musi być „przejrzysta" pojęciowo, musi posiadać taką samą siłę eksplanacyjną jak teoria klasyczna, musi umożliwiać posługiwanie się nią w praktyce jako narzędziem opisu świata i zdobywania wiedzy. Sam Field uważa ten problem za niebanalny. Odrzuca na przykład metodę reaksjomatyzacji Craiga (por. [Craig 1956]), która pozwala na wyeliminowanie zbędnych terminów, jako niezadowalającą z tego punktu widzenia [Field 1980, 41][12]. Field twierdzi jednak, że można podać atrakcyjny teoretycznie, jakościowy wariant teorii klasycznej.

Według Fielda, sformułowanie teorii fizycznej w wersji jakościowej nie tylko umożliwia wyeliminowanie założeń o istnieniu abstraktów, ale – niezależnie od znaczenia dla dyskusji filozoficznej – ma jeszcze następujące zalety:

(1) Jakościowe sformułowania nominalistyczne nie odwołują się do abstrakcyjnych, nie związanych przyczynowo z przedmiotem wyjaśniania obiektów matematycznych.

(2) Ujęcie jakościowe pomaga zrozumieć, jakie mechanizmy leżą tak naprawdę u podłoża wyjaśnianych zjawisk. Według Fielda bowiem „*u podłoża każdego dobrego zewnętrznego wyjaśnienia leży wewnętrzne wyjaśnienie*" [Field 1980, 44]. Prawa sformułowane w języku matematyki mają swoją podstawę w prawach i zależnościach dotyczących czysto fizycznych własności obiektów[13].

Prezentacji konstrukcji Fielda poświęcony jest następny paragraf.

2. Jakościowa wersja teorii grawitacji Newtona. Strategia Fielda polega na zastąpieniu klasycznej wersji teorii wersją jakościową – czyli taką, w której występują jedynie predykaty dotyczące relacji pomiędzy obiektami fizycznymi (a nie występują terminy matematyczne). Możliwość dokonania jakościowej rekonstrukcji warunkowana jest przyjęciem pewnych założeń dotyczących struktury przestrzeni fizycznej, które umożliwią sformułowanie dostatecznie silnych teorii jakościowych. Field przyjmuje tu stanowisko substantywizmu, w myśl którego punkty i obszary czasoprzestrzeni są oddziaływującymi przyczynowo obiektami fizycznymi[14]. Przyjęcie takiego założenia jest niezbędne dla skonstruowania jakościowej wersji teorii grawitacji.

Należy tutaj zauważyć, że ontologia Fielda jest bardzo bogata. Ponieważ czasoprzestrzeń Fielda jest izomorficzna z $\mathbf{R}^4$, więc istnieje *continuum* punktów czasoprzestrzeni i 2^c obszarów czasoprzestrzennych. One wszystkie są obiektami fizycznymi. Można tu wysunąć zarzut, iż tak naprawdę ontologia Fielda i ontologia realistyczna, w której zakłada się istnienie liczb rzeczywistych i zbioru potęgowego zbioru liczb rzeczywistych się nie różnią. Field jednak twierdzi, że nominalizm odrzuca istnienie obiektów abstrakcyjnych, natomiast nie nakłada ograniczeń na „rozmiar" ontologii. Samo postulowanie istnienia nieprzeliczalnie wielu obiektów fizycznych, ani nawet założenie, że mają one podobne własności strukturalne jak np. liczby rzeczywiste nie narusza zasad nominalizmu [Field 1980, 31]. Nominalizm nie jest bowiem bynajmniej związany z finityzmem.

2.1. Geometria Hilberta jako wzorzec. Wzorcem dla jakościowej teorii czasoprzestrzeni jest geometria Hilberta. Sformułowana jest ona w języku z dwoma terminami pierwotnymi: 'Bet' (predykat „leżenia między") i 'Cong' (predykat wyrażający przystawanie odcinków)[15], zaś odpowiednie aksjomaty ustalają znaczenia terminów pierwotnych. Okazuje się, że w geometrii można wykorzystać techniki teorii liczb rzeczywistych. Dzieje się tak dzięki temu, że zachodzą odpowiednie twierdzenia o reprezentacji:

(R_E) Struktura <A, Bet_A, $Cong_A$>, (gdzie $Bet_A \subseteq A^3$ zaś $Cong_A \subseteq A^4$ są interpretacjami w strukturze A predykatów 'Bet' i Cong') jest modelem dla aksjomatów Hilberta wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja 1-1 φ: $A \rightarrow \mathbf{R}^3$ taka, że spełnione są następujące zależności:

(a) $\forall x,y,z\ [Bet_A(y,x,z) \Leftrightarrow d(x,y)+d(y,z)=d(x,z)]$

(b) $\forall x,y,z,w\ [Cong_A(x,y,z,w) \Leftrightarrow d(x,y)=d(z,w)]$

gdzie $d(x,y)$ to odległość euklidesowa między punktami $\varphi(x)$ i $\varphi(y)$, wyrażona wzorem:

$d(x,y) = \sqrt{\{[\varphi_1(x)-\varphi_1(y)]^2+[\varphi_2(x)-\varphi_2(y)]^2+[\varphi_3(x)-\varphi_3(y)]^2\}}$

(U_E) Dla dowolnego modelu systemu aksjomatów i dwóch funkcji φ_1 i φ_2, których dziedziną jest ten model: jeśli φ_1 spełnia warunki twierdzenia o reprezentacji R_E, to φ_2 spełnia te warunki wtedy i tylko wtedy, gdy jest postaci $\varphi_2=T\varphi_1$, gdzie T jest przekształceniem euklidesowym na $\mathbf{R}^3$ (tzn. powstaje z pewnej ilości kombinacji translacji, odbić, obrotów wokół osi i mnożenia współrzędnych przez pewną stałą dodatnią).

Teoria liczb rzeczywistych „wkracza" więc do geometrii. Schemat wykorzystania teorii liczb rzeczywistych do geometrii jest następujący:

1. Zdania $\alpha_1,...,\alpha_n$ wyrażone w terminach jakościowych (tj. z użyciem predykatów 'Bet' i 'Cong') są „tłumaczone" na zdania $\alpha_1^*,...,\alpha_n^*$ teorii przestrzeni $\mathbf{R}^3$ (dotyczące np. funkcji odległości $d(x,y)$).

2. Z przesłanek $\alpha_1^*,...,\alpha_n^*$, w teorii przestrzeni $\mathbf{R}^3$ wyprowadzany jest wniosek β^*.

3. Wniosek β^* jest „tłumaczony" na zdanie β wyjściowej teorii jakościowej.

W ten sposób możemy wykorzystać twierdzenia teorii $\mathbf{R}^3$ do uzyskiwania nowych twierdzeń geometrycznych, wyrażonych w języku czysto jakościowym. Schemat ten jest więc zasadniczo taki sam, jak opisany wcześniej schemat wykorzystania technik matematycznych w teoriach jakościowych.

2.2. Jakościowa teoria czasoprzestrzeni i wielkości skalarnych[16]. Teoria czasoprzestrzeni Fielda opiera się na następujących pierwotnych predykatach:

(i) „Bet" (trójargumentowy predykat „leżenia między");

(ii) „Cong" (czteroargumentowy predykat „przystawania odcinków")

(iii) „A-Cong" (sześcioargumentowy predykat wyrażający przystawanie kątów)

(iv) „Simul" (dwuargumentowy predykat wyrażający jednoczesność zdarzeń);

(v) „S-Cong" (czteroargumentowy predykat wyrażający przystawanie przestrzenne odcinków[17].

Rozszerzeniem teorii czasoprzestrzeni jest teoria uwzględniająca wielkości skalarne (takie jak masa, temperatura czy potencjał pola). Teoria taka powstaje przez rozszerzenie teorii czasoprzestrzeni o dodatkowe predykaty: trójargumentowy „Temp-Bet" oraz czteroargumentowy „Temp-Cong"[18].

Celem wprowadzenia tych nowych predykatów jest zrekonstruowanie klasycznej teorii grawitacji w wersji jakościowej. Potrzebne instrumentarium matematyczne będzie zatem „modelowane" w terminach predykatów jakościowych. Ilustracją tej strategii jest przypadek funkcji położenia φ: CP$\rightarrow\mathbf{R}^4$ i funkcji skalarnej ψ:CP$\rightarrow\mathbf{R}$ (CP oznacza czasoprzestrzeń). W klasycznej wersji wielkość skalarna T jest po prostu złożeniem funkcji ψ oraz φ^{-1}: $T = \psi\varphi^{-1}: \mathbf{R}^4\rightarrow\mathbf{R}$. Prawa dotyczące tej wielkości skalarnej wyrażone są w terminach funkcji T – np. w postaci równań różniczkowych. Celem Fielda jest podanie jakościowych wersji tych praw – tj. praw wyrażonych w terminach predykatów jakościowych.

Field rozważa przykład jakościowego zdania CONT, które wyrażać ma ciągłość wielkości skalarnej. W klasycznej wersji fakt ten wyrażony jest po prostu w formie stwierdzenia, że funkcja $T = \psi\varphi^{-1}: \mathbf{R}^4\rightarrow\mathbf{R}$ jest funkcją ciągłą. W wersji jakościowej nie jest możliwe odwołanie się do matematycznego pojęcia „ciągłości". Rozważane zdanie CONT ma jednak wyrażać tę samą treść – a w tym celu musi mieć następującą własność:

(*) Dla dowolnego modelu M teorii aksjomatycznej JAS (od *joint axiom system* – Fieldowi chodzi o teorię w wersji klasycznej) dotyczącej czasoprzestrzeni i wielkości skalarnej T, i dowolnych dwóch funkcji reprezentujących φ i ψ, zdanie CONT jest prawdziwe w modelu M wtedy i tylko wtedy gdy $T=\psi\varphi^{-1}$ jest funkcją ciągłą.

Realizację swojej strategii Field rozpoczyna od zdefiniowania obszarów bazowych (*temperature-basic oraz spatio-temporally basic*). Są to przeciwobrazy odcinków i półprostych otwartych przy odwzorowaniach reprezentujących temperaturę[19] i współrzędne czasoprzestrzenne. Oczywiście definicja tych obszarów sformułowana jest w czysto jakościowym języku.

Drugim krokiem jest wykazanie, że w jakościowym języku można wyrazić fakty dotyczące proporcji między długościami odcinkami czasoprzestrzeni, oraz proporcje między różnicami w wielkościach skalarnych. W tym celu Field definiuje pojęcie „zbioru punktów równo odległych" (*spatio-temporally equally spaced region*) – jest to obszar R składający się z punktów współliniowych[20], o tej własności, że odległości między kolejnymi punktami są równe. Dalej pokazuje, że w języku jakościowym można wyrazić fakt, że iloczyn długości pewnych dwóch odcinków *xy*, *zw* jest mniejszy niż iloczyn długości dwóch odcinków *st*, *uv*. To z kolei umożliwia zdefiniowanie iloczynów i ułamków posiadających znak (tj. dodatnich i ujemnych).

Dzięki temu, że mamy do dyspozycji jakościowe odpowiedniki ułamków i mnożenia, można zdefniować jakościowe pojęcie „pochodnej". Oczywiście, taka definicja musi być niezależna od wyboru klasycznych funkcji reprezentujących φ i ψ (gdyż o tych funkcjach w języku jakościowym w ogóle nie można mówić). Nie można mówić o klasycznych wartościach pochodnych (np. pochodnych cząstkowych), ale można porównywać pochodne kierunkowe z odpowiednimi interwałami. Celem jest więc podanie jakościowej wersji klasycznego stwierdzenia:

(*) pochodna kierunkowa funkcji T $(=\psi\varphi^{-1})$ w kierunku wektora $\varphi(a)$-$\varphi(b)$ istnieje w punkcie $\varphi(x)$ i ma wartość równą $\psi(c)$- $\psi(d)$.

Field pokazuje, że faktycznie możliwe jest wyrażenie tego faktu w języku jakościowym. Możliwe jest także zdefiniowanie jakościowych analogów pochodnych wyższych rzędów, co z kolei umożliwia zdefiniowanie operatora Laplace'a Δ[21].

Ostatnim krokiem jest podanie jakościowej wersji równania ruchu teorii grawitacji Newtona. W wersji klasycznej mówi ono tyle, że przyspieszenie cząstki w polu grawitacyjnym jest równe gradientowi potencjału pola grawitacyjnego w tym punkcie. Wykorzystując zdefiniowane wyżej pojęcia, Field podaje jakościowe sformułowanie równania ruchu, co kończy jakościową rekonstrukcję teorii grawitacji Newtona.

3. Podsumowanie.

1. Według Fielda, matematyka jest nietwórcza względem fizyki – wnioski dotyczące świata fizycznego, które można udowodnić w oparciu o techniki matematyczne, można też udowodnić bez wykorzystania tych technik.

2. Kluczem do zastosowania teorii matematycznych S do teorii nominalistycznych N jest – z technicznego punktu widzenia – fakt istnienia twierdzeń o reprezentacji: w teorii N+S można udowodnić istnienie odpowiednich funkcji z obiektów konkretnych w abstrakcyjne. To pozwala na wykorzystanie wyników matematycznych do wyprowadzania wniosków dotyczących obiektów fizycznych.

3. Fakt, iż zachodzi zasada nietwórczości dostarcza argumentu warunkowego: <u>jeśli</u> istnieją atrakcyjne teoretycznie sformułowania jakościowe, <u>to</u> można uznać, że matematyka pełni funkcję użytecznego, lecz zasadniczo zbędnego narzędzia.

4. Konieczne jest zatem znalezienie takich atrakcyjnych teorii jakościowych – odpowiedników teorii klasycznych. W miejsce klasycznych zdań dotyczących relacji między obiektami fizycznymi a matematycznymi (w szczególności relacji funkcyjnych, czyli po prostu funkcji – jak np. temperatura czy masa), teorie te sformułowane są w terminach relacji między obiektami fizycznymi: punktami i obszarami czasoprzestrzeni.

5. Podanie jakościowych wersji opiera się na założeniu substantywistycznej koncepcji czasoprzestrzeni. Swobodnie mówiąc, to obiekty geometryczne (punkty i obszary czasoprzestrzeni) zastępują obiekty matematyczne. Strategię Fielda można zatem określić jako „strategię geometryczną". Field

podaje wersję teorii grawitacji Newtona, konstruując jakościową wersję, w ramach której rekonstruowane są odpowiedniki pojęć klasycznych. Twierdzi też, że podobny zabieg jest zasadniczo możliwy do przeprowadzenia w wypadku innych teorii fizycznych.

BIBLIOGRAFIA

Craig W.
[1956] *Replacement of auxiliary expressions.* "Philosophical Review", 65, s. 38-55.
Field H.
[1980] *Science Without Numbers.* Oxford: Basil Blackwell.
[1989] *Realism, mathematics and modality.* Blackwell, Oxford, Cambridge.
Shapiro S.
[2000] *Thinking about mathematics.* Oxford, Oxford University Press.
Wójtowicz K.
[1997] *Na czym polega* argument z niezbędności *Quine'a?* „Edukacja Filozoficzna", 24, s. 297-306.
[2002] *Fikcjonalizm matematyczny – próba analizy.* „Edukacja Filozoficzna" 34 (przyjęte do druku).

Przypisy:

[1] Artykuł został napisany w ramach grantu KBN 1 H01A006 17 „Realizm i antyrealizm w filozofii matematyki".

[2] Taką „reformę" zgodną z koncepcją filozoficzną konceptualizmu proponowali intuicjoniści.

[3] Prezentacja tu ma szkicowy charakter. Czytelnik znajdzie bardziej szczegółową prezentację np. w [Wójtowicz 1997].

[4] Argument ma postać nieco ogólniejszą – chodzi w nim nie tylko o fizykę, ale o nauki empiryczne. W tym artykule, dla uproszczenia, będzie mowa jedynie o zastosowaniach w fizyce.

[5] Oczywiście, podobna argumentacja odnosi się do każdej teorii matematycznej (np. rachunku prawdopodobieństwa, analizy funkcjonalnej, geometrii różniczkowej, *etc.*), a nie tylko do teorii funkcji rzeczywistych. Konkretne sformułowanie zależy oczywiście od tego, jakiego typu instrumentarium matematyczne jest wykorzystywane w danej teorii empirycznej.

[6] Używany przez Fielda termin „synthetic" tłumaczony jest jako „jakościowy". Dalej będę posługiwał się terminami „teoria jakościowa" i „teoria klasyczna", „zdanie jakościowe" i „zdanie klasyczne". Teoria klasyczna to teoria sformułowana w zwykłej wersji – z użyciem tradycyjnego instrumentarium matematycznego. Teoria jakościowa to teoria sformułowana w języku, w którym mowa tylko o własnościach obiektów fizycznych i relacjach między nimi.

[7] Tu należy pamiętać o niebezpieczeństwie pewnej pomyłki. Wzbogacenie języka o nowe predykaty (interpretowane w tej samej klasie obiektów, co „stare") i nowe aksjomaty może prowadzić do nowych wniosków w „starym" języku. Jeśli np. do teorii liniowego porządku dołączymy nowy predykat $\leq$ *, który też będzie spełniał aksjomaty liniowego porządku (choć oczywiście „stary" i „nowy" porządek nie muszą mieć ze sobą nic wspólnego), i aksjomat, który wyraża fakt, że uniwersum jest nieskończone (np. „Istnieje obiekt nie będący następnikiem, ale każdy obiekt ma następnik"), to będzie to też miało wpływ na prawdziwość pewnych zdań w „starym" języku. Tu jednak mówimy tak naprawdę o wzbogaceniu nie tylko słownika – o terminy matematyczne – ale także o modyfikacji modeli – o obiekty matematyczne.

[8] Dla danego języka jakościowego zdanie α^* tworzone jest w sposób następujący: najpierw wprowadzamy nowy predykat M(x), który oznacza, że x jest obiektem matematycznym. Zdanie α^* powstaje ze zdania α przez ograniczenie zakresu kwantyfikatorów do obiektów x spełniających warunek $\neg M(x)$, czyli do obiektów niematematycznych [Field 1980, 10]. Ściśle:

$\varphi^* = \varphi$, dla φ atomowych

$(\neg\varphi)^* = \neg\varphi^*$

$(\varphi \wedge \psi)^* = \varphi^* \wedge \psi^*$

$(\exists x\varphi)^* = \exists x\,(\neg M(x) \wedge \varphi^*(x))$

$(\forall x\varphi)^* = \forall x(\neg M(x) \Rightarrow \varphi^*(x))$

[9] W tym sformułowaniu świadomie zachowuję wieloznaczność pojęcia „wynikania", która występuje u Fielda. Nie wiadomo bowiem, czy chodzi o wynikanie semantyczne, czy syntaktyczne. Zagadnienie to jest analizowane w dalszej części tego artykułu.

[10] Dołączenie założeń matematycznych do teorii fizycznej nie dostarcza więc żadnej nowej wiedzy. Field zauważa tu, że nawet dla realisty matematycznego byłoby zaskoczeniem, iż ze standardowej matematyki wynikają wnioski dotyczące np. ilości obiektów fizycznych albo wydarzeń historycznych [Field 1980, 13].

Ten przykład Fielda nie jest jednak rzetelny. Także dla fizyka kwantowego byłoby zaskoczeniem, że z praw mechaniki kwantowej wynika np. data wybuchu II wojny światowej. Trudno jednak powoływać się na taki argument w dyskusji dotyczącej mechaniki kwantowej.

[11] ZFC oznacza teorię mnogości Zermelo-Fraenkla, CH hipotezę *continuum*.

[12] Metoda Craiga polega na zastosowaniu pewnego „tricku" wykorzystującego numerację Gödlowską. Jeśli dana jest teoria T, z której chcemy wyeliminować klasę wyrażeń K, to dla dowolnego zdania α spoza klasy K (czyli „dozwolonego") tworzymy numer Gödlowski dowodu τ zdania α. Jeśli numer ten wynosi n, to tworzymy aksjomat $\beta = \alpha\wedge \ldots \wedge \alpha$ – gdzie długość tej koniunkcji wynosi właśnie n. W ten sposób w formule β zostaje zawarta informacja dotycząca numeru Gödlowskiego dowodu τ formuły α, natomiast otrzymana w ten sposób teoria $T^* = \{\beta : \beta = \alpha\wedge \ldots \wedge \alpha$, gdzie $\alpha \in T$, $\alpha \notin K$, zaś długość koniunkcji $= n\}$ nie zawiera wyrażeń z eliminowanej klasy K. Zabieg ten jednak jest niewątpliwie sztuczny, zaś aksjomatów β nie można uznać za postulaty, które winny ustalać sens terminów pierwotnych teorii T i „chwytać" związane z nimi intuicje.

[13] Shapiro w [Shapiro 2000, 34] komentuje problem stosowalności matematyki w fizyce, podając przykład studenta, który pyta wykładowcę o przyczynę pewnego zjawiska obserwowanego na ekranie oscyloskopu. Odpowiedź wykładowcy brzmi: przyczyną tego zjawiska jest fakt, że pewne równanie

matematyczne w pewnym punkcie x_0 przyjmuje wartość 0. Pojawia się tu pewna trudność pojęciowa: jak jest możliwe, aby przyczyną pojawienia się na ekranie oscyloskopu pewnego obrazu było to, że dane wyrażenie matematyczne zeruje się w punkcie x_0?

Wydaje się, że rozważania Fielda dotyczące „wewnętrznych" własności nawiązują do tego typu przykładów. Według Fielda, jakościowe wersje teorii fizycznych będą wolne od takich trudności i pozwolą na podanie bezpośredniego wyjaśnienia.

[14] W myśl przeciwnego stanowiska relacjonizmu, przestrzeń jest wyznaczona jedynie poprzez relacje między fizycznymi obiektami i nie przysługuje jej „samodzielny" byt.

[15] Bet(*x,y,z*) – *x* leży pomiędzy *y* oraz *z*. Cong(*x,y,z,w*) – odcinek xy przystaje do odcinka *zw*.

[16] Moim celem jest tu jedynie ogólne naszkicowanie strategii Fielda. Szczegóły techniczne (których przytaczanie nie jest możliwe ze względu na szczupłość miejsca) Czytelnik znajdzie w [Field 1980, rozdz. 8].

[17] Bet(*x,y,z*) – *x* leży pomiędzy *y* oraz *z*.

Cong(*x,y,z,w*) – odcinek *xy* przystaje do odcinka *zw*.

A-Cong(*x,y,z,t,u,w*) – kąt *xyz* jest przystający do kąta *tuw*

Simul(*x,y*) – *x,y* są równoczesne

S-Cong(*x,y,z,w*) – *x* jest równoczesne z *y*, *z* jest równoczesne z *w* oraz odcinki *xy* i *zw* są przystające.

[18] „Temp-Bet(*x,y,z*)" znaczy, że temperatura punktu *x* leży pomiędzy temperaturą punktu *y*, a temperaturą punktu *z*, zaś „Temp-Cong(*x,y,z,w*)" znaczy, że różnice temperatur w punktach *x,y* oraz w punktach *z,w*, są takie same.

[19] Field rozważa przykład temperatury – oczywiście jego strategia stosuje się do dowolnej wielkości skalarnej.

[20] W języku jakościowym można zdefiniować predykat Coll(*x,y,z*) wyrażający współliniowość punktów *x,y,z*.

[21] Operator Laplace'a Δ zdefiniowany jest jako suma drugich pochodnych cząstkowych:

$$\Delta\varphi = \delta^2\varphi/\delta x_1^2 + \delta^2\varphi/\delta x_2^2 + \ldots + \delta^2\varphi/\delta x_n^2$$

Np. w ciele jednorodnym o brzegu Γ, o przewodnictwie cieplnym jednakowym we wszystkich kierunkach, stacjonarny rozkład temperatury opisany jest równaniem Laplace'a $\Delta\varphi = 0$.