EDUKACJA FILOZOFICZNA
Vol. 29 2000

JAROSŁAW MROZEK
Uniwersytet Gdański

PROBLEM ROZUMIENIA MATEMATYKI

Abstrakt

Problem nauczania lub poznawania matematyki nieodłącznie wiąże się z rozumieniem matematyki. Nie można wyobrazić sobie uprawiania matematyki, w sensie uczenia się jej czy też tworzenia nowej, bez jej rozumienia. Celem artykułu jest próba wyjaśnienia jaka jest struktura procesu rozumienia obiektów matematycznych takich jak: pojęcia, definicje, twierdzenia czy teorie matematyczne.

Rozumienie jest rodzajem poznawania pośredniego, dotyczącego przedmiotów związanych z rzeczywistością duchową. Ten rodzaj poznawania polega na uchwyceniu sensu tego, co ma być zrozumiane, co z kolei objawia się umiejętnością zastosowania tego, co rozumiemy w innych okolicznościach i sytuacjach. Tak więc rozumienie należy traktować funkcjonalnie - jako uzyskiwanie sensu.

Wydaje się, że można wyróżnić trzy podstawowe poziomy, na których przebiega proces rozumienia. Poziom pierwszy - jest poziomem rozumienia znaczenia pojęć i terminów występujących w rozważaniach matematycznych. Matematyk musi mieć wiedzę, co dane symbole oznaczają oraz co znaczą odpowiadające im pojęcia. Na poziomie drugim rozumienie dotyczy struktury obiektu rozumienia, a więc chodzi o ustalenie sensu sekwencji użytych pojęć i terminów. Trzeci poziom - rozumienie „roli” obiektu rozumienia - jest ustalaniem sensu obiektu rozumienia w kontekście większej całości czyli jest rozpoznaniem tła problemu.

Rozumienie matematyki, aby było ono dostatecznie głębokie, winno uwzględniać (oprócz teoretycznej) dodatkowo przynajmniej trzy płaszczyzny rozważań: historyczną, metodologiczną i filozoficzną. Tak więc postulatem płynącym z powyższych rozważań, jest uwzględnienie w procesie studiowania matematyki zarówno historii matematyki jak i filozofii (z metodologią) matematyki, pominięcie których sprawia, że rozumienie matematyki jest powierzchowne i niepełne.

W znakomitej książce P. J. Davis'a i R. Hersh'a *Świat matematyki,* jest jeden niewielki rozdział[1] poświęcony kryzysowi rozumienia matematyki. Niestety, oprócz omówienia konkretnego przykładu trudności związanych ze zrozumieniem pewnego dowodu przez studentów i prób ich wyjaśnienia odwołujących się do psychologii, nie ma tam rozważań poświęconych samemu pojęciu rozumienia. Jedynym stwierdzeniem charakteryzującym to pojęcie jest uwaga, że rozumienie wiąże się z wysiłkiem.

[1] P. J. Davis, R. Hersh: *Świat matematyki.* Warszawa 1994, s. 242-251.

Problem rozumienia matematyki wymaga, jak sądzę, krótkiego omówienia ogólniejszej kwestii, a mianowicie kwestii rozumienia jako takiego. Rozumienie będę uznawał za rodzaj poznania pośredniego wyznaczonego przez percepcję stosunków zachodzących między przedmiotami różnego rzędu *(y* staje się zrozumiałe dla x -a, jako człon relacji *xRy,* w której *y* jest przedmiotem innego rzędu, intencjonalnie ujętym przez x). Jak można zauważyć, pomijam w tym momencie problem zrozumienia innego człowieka, chociaż na ogół odbywa się to poprzez rozumienie fenomenalnie dostępnych nam ludzkich zachowań, wytworów językowych lub pozajęzykowych.

Wydaje się, iż trafnie a przy okazji zwięźle, problem **rozumienia** ujęła polska uczona Izydora Dąmbska[2] stwierdzając, że ten sposób poznawania charakteryzuje się tym, że:

1) dotyczy przedmiotów związanych z rzeczywistością duchową - znaków, wytworów psychicznych, psychofizycznych, struktur logicznych *sensu largo* itp.;

2) polega na uchwyceniu stosunków, które wyznaczają sens tego, co ma być rozumiane;

3) umożliwia odtwarzanie lub stosowanie w innych warunkach tego, co rozumiemy.

Istota tego sposobu poznania, które nazywamy rozumieniem, decyduje o charakterze hipotetycznym i konstrukcyjnym sądów na rozumieniu opartych.

Chciałbym zaakcentować pewne punkty powyższego określenia, które następnie rozwijać będę w odniesieniu do matematyki. Otóż rozumienie jest: po pierwsze - pewnego rodzaju poznaniem, po drugie - poznaniem pośrednim, po trzecie - polega na uchwyceniu sensu tego, co ma być rozumiane, po czwarte - objawia się umiejętnością zastosowania tego, co rozumiemy w nowej sytuacji.

Rozważania nasze rozpoczniemy od trywialnego, być może, stwierdzenia, iż ludzie mający kontakt z matematyką, np. uczący się jej, starają się nie tylko zapamiętać tekst matematyczny, ale także go rozumieć. Sugeruje to, iż samo zapamiętywanie „regułek”, mechaniczne przyswajanie sobie definicji czy też sformułowań twierdzeń, nie oznacza jeszcze znajomości matematyki. Jak sądzę, możliwe jest opanowanie w ten sposób pewnego obszaru matematyki (przy ogromnym nakładzie pracy i czasu) oraz poprawne udzielanie odpowiedzi na zadane pytania dotyczące tego fragmentu matematyki. Jednak nie powiemy o kimś, kto tego dokonał, że poznał on ten dział matematyki. Wydaje się, iż „prawdziwy”, głębszy kontakt z matematyką nie może dokonać się bez udziału rozumienia, a więc rozumienie jest w tym

[2] I. Dąmbska: *W sprawie pojęcia rozumienia.* „Ruch Filozoficzny” Ł XVIII, 1958, nr 4.

wypadku swoistą formą poznania odnoszącą się w szczególności do matematyki. Wielcy matematycy podkreślają, że przy odkrywaniu czy też tworzeniu matematyki ogromną rolę odgrywają: intuicja, olśnienie, bezpośredni intelektualny wgląd w dziedzinę przedmiotową matematyki. Jeden z wybitnych polskich matematyków uczestniczących w seminarium Gödla we Wiedniu anegdotycznie scharakteryzował jego genialność stwierdzając, że Gödel miał taką znajomość problemów, którymi się zajmował, jakby miał bezpośredni telefon do Pana Boga. Tym, którzy zajmują się matematyką a nie są obdarzeni „iskrą bożą” pozostaje skorzystać z drogi pośredniej.

Spróbujmy wyjaśnić pokrótce powyższą tezę. Wydaje się, że w matematyce jedynym sposobem skierowania uwagi na to, co chcemy zrozumieć, jest pewien tekst matematyczny - pisany, mówiony czy „myślany”. Innymi słowy, kontakt z tekstem matematycznym jest warunkiem koniecznym, by nastąpił kontakt z matematyką. Stąd też, jeżeli rozumienie jest formą poznawania matematyki, jest ono poznaniem pośrednim w tym sensie, że dokonującym się poprzez tekst, który pełni funkcję bezpośrednich danych. Powstaje jednak problem, czy rozumienie nie dotyczy po prostu tekstu, czy nie jest po prostu rozumieniem tekstu. Sugestię tę przy bliższym rozpatrzeniu należy jednak odrzucić, albowiem tekst ma tylko wprowadzać nas w dziedzinę tego, co matematyczne, co jest samym badanym w tej nauce przedmiotem. Uchwycenie, na podstawie tekstu, sensu niezbędnego do rozbudowy całej dziedziny pozwala na całkowite oderwanie się od tekstu. Można jak gdyby „zlekceważyć” tekst przekazu matematycznego na rzecz dziedziny przedmiotowej, którą ten tekst udostępnia, gdyż poprzez rozumienie możemy odsłonić strukturę dziedziny przedmiotowej bez względu na to, czy dalszy ciąg tekstu efektywnie ją swym sensem rozwija, czy też nie. Dzięki temu możemy znajdować błędy (jeśli takie istnieją) w tekstach matematycznych, logicznych, natomiast nie do wyobrażenia jest wskazanie błędu pozalogicznego (nie licząc gramatycznych, ortograficznych lub faktualnych), dotyczącego fabuły w tekście literackim. Poza tym posługując się tekstem matematycznym poznać możemy nie tylko to, co zostało w nim *explicite* zawarte (można - dla przykładu - sformułować nowe hipotezy i próbować je udowadniać lub też badać inne własności obiektów już badanych). Ta okoliczność sugeruje, iż rozumienie matematyki dotyczy dziedziny przedmiotowej a nie tekstu matematycznego.

Wpierw jednak należy rozumieć tekst matematyczny w takim znaczeniu, jakie występuje w następującym stwierdzeniu: rozumiem tekst w języku obcym. Gdy mówimy: rozumiem tekst obcojęzyczny, to stwierdzamy fakt posiadania wiedzy o danym języku pozwalającej lepiej lub gorzej transponować go na język ojczysty. Rozumienie języka ojczystego wydaje się oczywiste i wiąże się ze znajomością, zarówno syntaktyki jak i semantyki tego języka, uzyskiwaną w procesie uczenia się języka. John R. Searle[3] wręcz tłumaczy swoje pojęcie rozumienia, rezygnując ze złożonych analiz, poprzez odwołanie się do intuicji rozumienia języka ojczystego (w jego przypadku angielskiego). W moim przekonaniu sprawa nie jest taka oczywista, bowiem można czytać tekst w „zrozumiałym” przez siebie języku ojczystym i nie rozumieć go. Tak się może zdarzyć, gdy przekaz dotyczy dziedziny zupełnie obcej naszemu wykształceniu lub gdy wykracza swym poziomem poza nasze możliwości intelektualne. Można oczywiście „rozumieć” tekst w języku obcym i również go nie rozumieć.

Wracając do tekstu matematycznego, powinien on w pierwszym rzędzie być rozumiany w takim sensie, jak tekst obcojęzyczny. Tekst matematyczny składa się ze znaków, które oznaczają pewne pojęcia właściwe dla matematyki i będzie on bezsensownym zbiorem tworów graficznych, gdy zabraknie wiedzy lub interpretacji, co dane symbole oznaczają, na jakie pojęcia wskazują. Przy czym zupełnie obojętne jest, w czym ma swoją podstawę owo wskazywanie - czy jest ono wynikiem tylko pewnej konwencji, czy też pochodzi z jakiegoś podobieństwa tego co dane i tego, na co owe dane wskazują. Słowem, matematyk winien mieć wiedzę dotyczącą znaczenia fizycznych znaków występujących w tekście, albowiem ta wiedza odgrywa rolę danych wyjściowych i pozwala dotrzeć do treści tekstu.

Kolejny krok to rozumienie tej treści, które dotyczy oczywiście już dziedziny przedmiotowej ujętej w pewne kategorie. Zauważmy, że nawet wtedy, gdy wiemy jakie znaki reprezentują dane pojęcia, zrozumienie danego zagadnienia może być niewłaściwe lub nawet żadne. Przyczyną może być niedostateczna wiedza o używanych pojęciach: 1) nie wiemy, co one znaczą, jaką mają treść, 2) nie są dla nas jasne relacje i związki między pojęciami, bądź 3) nie znamy dostatecznie szerszego tła, tzn. kontekstu teoretycznego problemu będącego obiektem rozumienia. Każdy z wymienionych przypadków sprawia, że problem którym się zajmujemy ma dla nas niedookreślony sens. Rozjaśnianie lub odkrywanie go, czy wręcz nadawanie sensu jest właśnie procesem rozumienia. Intencje moje w skrócie wyraża teza: **rozumienie to odkrycie sensu.**

Wydaje się, że już na potocznym szczeblu poznania rozumienie należy traktować funkcjonalnie - jako uzyskiwanie sensu. Dane pojęcie uzyskuje sens poprzez zestawianie go z innymi pojęciami i rozpatrywanie w różnych możliwych kontekstach, w których może zaistnieć. Podobnie, aczkolwiek nie tak prosto, rzecz ma się na naukowym szczeblu poznania. Większa złożoność bierze się stąd, że rozumienie w tym przypadku jest procesem wielopoziomowym, przebiegającym jednocześnie na wielu różnych płaszczyznach.

[3] Por. J. R. Searle: *Minds, Brains and Programs.* "Behavioral and Brain Sciences" 3, Cambridge University Press 1980, s. 417-424 (podaję za: J. Kloch: *Świadomość komputerów?* Tarnów 1996, s. 22).

Te płaszczyzny reprezentują, odmienne pod względem przyjętego punktu widzenia, charakterystyki danego obiektu rozumienia. Nie chodzi w tym wypadku o głębokość analiz, ale o uzyskiwanie różnych, wzajemnie komplementarnych opisów danego obiektu. Podstawową płaszczyzną, na której dokonuje się proces rozumienia jest płaszczyzna nazwana przeze mnie **teoretyczną płaszczyzną rozumienia.** Rozważania przeprowadzane w jej ramach są analizą synchroniczną statusu obiektu rozumienia w jego „naturalnym” otoczeniu, w obrębie teorii lub dziedziny, której jest elementem. Inne płaszczyzny rozważań istotnych dla kwestii rozumienia to: historyczna, metodologiczna i filozoficzna. W każdej z tych trzech płaszczyzn można wyróżnić trzy podstawowe poziomy, na których **obiekt rozumienia** może zyskiwać sens dla podmiotu poznającego, a tym samym może być rozumiany: 1) poziom rozumienia znaczenia terminów i pojęć; 2) poziom rozumienia struktury obiektu rozumienia (ustalanie sensu sekwencji pojęć i terminów); 3) poziom rozumienia „roli” obiektu rozumienia (pojmowanie sensu obiektu rozumienia ze względu na większą całość, a więc rozpoznanie tzw. tła problemu i struktury tego tła)[4].

Sądzę, że jeżeli chodzi o składniki teorii matematycznych takie jak: pojęcia, definicje, twierdzenia, dowody jak i całe teorie - to proces ich zrozumienia przebiega według schematu zaprezentowanego powyżej. Różnie oczywiście mogą przedstawiać się proporcje udziału rozumienia na poszczególnych poziomach. Jednakże zaznaczmy, iż sprowadzenie pojęcia rozumienia do jednego tylko z wymienionych aspektów nie oddaje całego bogactwa intuicji, jakie z nim wiążemy.

Spróbujmy dokonać egzemplifikacji powyższych ustaleń rozpatrując powszechnie znany wzór matematyczny:

Chodzi o to, by odtworzyć jak w tym przypadku będzie wyglądał proces zrozumienia tego wzoru. Nawiązuję w ten sposób do uwag na temat rozumienia wzorów matematycznych jakie poczynił Roger Penrose[5].

Zgodnie z tym co stwierdziliśmy wcześniej, pierwszy poziom rozumienia dotyczy ustalenia sensu pojęć i terminów występujących w obiekcie rozumienia. Nie zrozumiemy naszego przykładu, gdy nie będziemy wiedzieć, co znaczą poszczególne symbole zastosowane w tym wzorze. Wymieńmy je po kolei i są to:

e - tzw. liczba Nepera, podstawa logarytmów naturalnych; jest liczbą niewymierną a nawet niealgebraiczną; definiujemy ją jako granicę ciągu $(l+1/n)^n$ przy $n \to \infty$, liczba *e* w przybliżeniu równa jest 2,71828182...

[4] Por. D. Gierulanka: *Zagadnienie swoistości poznania matematycznego,* cz. II. Warszawa 1962.

[5] Por. R. Penrose: *Nowy umysł cesarza.* Warszawa 1995, s. 13.

i - nowy rodzaj liczby niefortunnie nazwany Jednostką urojoną”, została ona wprowadzona jako pierwiastek równania $x^2 = -1$ nie posiadającego rozwiązania w zbiorze liczb rzeczywistych, jest to liczba umożliwiająca zdefiniowanie liczb zespolonych, czasami nieprawidłowo określana jako „pierwiastek z -*l*".

π - stała matematyczna określająca stosunek długości okręgu koła do długości jego średnicy, liczba ta jest niewymierna i podobnie jak liczba *e* nie jest pierwiastkiem żadnego równania o współczynnikach całkowitych, π - w przybliżeniu wynosi 3, 141582...

= - znak używany na oznaczenie równości wyrażeń stojących po jego obu stronach.

- *l* - nieznana Grekom liczba, która (wraz z innymi liczbami ujemnymi) została uznana w Europie za pełnoprawną liczbę dopiero w XVIII wieku; chińskie traktaty matematyczne wspominały o liczbach ujemnych już w II wieku przed naszą erą, a matematycy hinduscy używali zera i liczb ujemnych w VI-VII wieku naszej ery.

Zauważmy, że w rozpatrywanym wzorze występują „niezwyczajne” liczby, z których może jedynie -7 jest częściej spotykana na co dzień i ma w miarę zrozumiałą interpretację (jako dług czy też brak czegoś). Natomiast liczba *i* nie przypomina żadnej znanej liczby np. nie jest ani większa, ani mniejsza od zera, co jest własnością niezwykłą jak na pojęcie liczby w potocznym rozumieniu. Liczby *e* czy π są o tyle dziwne, że tak naprawdę są efektem operacji nieskończonych - przechodzenia do granicy i sumowania szeregów nieskończonych. Tak więc pełne zrozumienie naszego przykładu wymaga znajomości fragmentów kilku działów matematyki m. in.: geometrii, trygonometrii, algebry, teorii granic, teorii szeregów nieskończonych. Rozpatrując podany wzór w teoretycznej płaszczyźnie rozumienia stwierdzamy, że za niepozornie wyglądającymi symbolami zastosowanymi we wzorze oraz krótkimi charakterystykami pojęć przez nie reprezentowanych, kryją się nietrywialne teorie matematyczne, które są ich naturalnym kontekstem. Dowodem na to jest to, że liczby e i π nieoczekiwanie pojawiają się w bardzo różnych działach matematyki uzyskując status fundamentalnych stałych matematycznych. W tym kontekście rozpatrywany przez nas wzór jest wymownym przykładem potwierdzającym jedność metodologiczną i przedmiotową matematyki.

Kolejny krok w rozumieniu powyższego wzoru - naszego obiektu rozumienia - jest przejściem do rozumienia struktury, które, jak postulowaliśmy, polega na ustaleniu sensu sekwencji pojęć. Skądinąd wiemy, że umieszczenie jakiejś liczby po prawej stronie u góry innej liczby oznacza operację potęgowania. A więc przez analogię, lewą stronę wzoru należy rozumieć jako liczbę *e* podniesioną do potęgi *i* π Wyrażenie i π jest liczbą zespoloną $0 + i\pi$, której część rzeczywista jest równa *0*, a część urojona wynosi π. Nie musimy jednak w tym artykule odwoływać się do operacji podnoszenia do potęgi o wykładniku zespolonym, bowiem Leonhard Euler udowodnił, że:

$$e^{\alpha} = \cos x + i\sin x,$$

gdzie *x* jest dowolną liczbą rzeczywistą. Dla $x = \pi$ otrzymujemy

$$e^{\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1 + 0 = -1,$$

z tym, że oczywiście wcześniej trzeba wiedzieć, co kryje się pod symbolami *sin* i *cos*. Zapis całości rozważanej przez nas formuły należy rozumieć jako: *e* podniesione do potęgi zespolonej $i\pi$ daje w wyniku -7.

I oto te cztery różne rodzaje liczb, które w matematyce pojawiły się zupełnie niezależnie i w różnych okresach czasowych, zostały połączone w formułę będącą jednym z najsłynniejszych równań w matematyce. Jest to wynik całkowicie nieoczekiwany i nieprzewidywalny, chociaż jest konsekwencją definicji liczby naturalnej (i jej późniejszych rozszerzeń na liczby ujemne, wymierne, rzeczywiste i zespolone).

Powyższe rozważania stanowią jedynie najogólniejszy szkic procesu dochodzenia do rozumienia elementów wyższej matematyki. Obawiam się, że gdybyśmy poprzestali na tym, nasze rozumienie byłoby jedynie powierzchowne. W tym momencie proces rozumienia nie kończy się. Pozostaje trzeci poziom rozumienia, na którym trzeba uwzględnić jeszcze sens tego wzoru w szerszym kontekście. Jak wspomniałem wcześniej, rozumienie jest procesem wielopłaszczyznowym. Aby wyczerpująco scharakteryzować strukturę „tła” obiektu rozumienia, należy uwzględnić również - poza teoretyczną płaszczyzną rozumienia - płaszczyznę historyczną, metodologiczną i filozoficzną.

Oczywiste jest, iż dogłębne zrozumienie pojęć bez prześledzenia ich genezy jest niemożliwe. Sens poszczególnych elementów, składających się na interesujący nas obiekt rozumienia, w pełni ujawnia się dopiero po uwzględnieniu diachronii, bowiem mają one swoją „ludzką” historię powstawania. Nie miejsce tu na szczegółowe badania z zakresu historii matematyki, gdybyśmy jednak chcieli prześledzić rozwój tych pojęć aż do ich połączenia w podanej powyżej formule, musielibyśmy zapoznać się ze sporym kawałkiem historii matematyki.

Wspomnijmy wreszcie o płaszczyźnie metodologicznej. Mając do czynienia z tak różnymi przykładami liczb, należy spróbować zrozumieć łączące je związki, w nadziei, że badania takie rzucą światło na samo pojęcie liczby. Należałoby na przykład metodologicznie zinterpretować kolejne etapy rozwoju pojęcia liczby i wyjaśnić, dlaczego rzeczywista historia pojęcia liczby: filiacja N - Q_+ - R_+ - R - C (gdzie N oznacza liczby naturalne, Q_+ - liczby wymierne dodatnie, R_+ - liczby rzeczywiste dodatnie, R - liczby rzeczywiste z zerem i liczbami ujemnymi, C - liczby zespolone) jest odmienna od powszechnie uznawanej teoriomnogościowej interpretacji zakresu pojęcia liczby tzn.:

$$N \subset Z \subset Q \subset R \subset C.$$

Z punktu widzenia metodologii, filiacja N - Z - Q - R - C, choć nie jest zgodna z faktycznym porządkiem historii, może być uznana za model rozwoju pojęcia liczby. Mechanizm tego rozwoju uwidacznia się w sytuacji, w której występuje swoisty „niedobór” obiektów w stosunku do operacji, jakie wykonywano na znanych już obiektach. Dla przykładu: w czasach starożytnych dodawano liczby naturalne (uznawane zresztą za jedyne prawdziwe liczby) oraz, jak podejrzewam, odejmowano je, ale ta operacja nie zawsze była wykonalna. Nie w każdym przypadku liczby naturalne pozwalały na wykonanie operacji odejmowania. Można więc powiedzieć, że w pewnym momencie wystąpił pewien „nacisk operacyjny”[6], który doprowadził do powstania pojęcia liczby ujemnej. Odbyło się to na drodze postulowania pewnych przedmiotów matematycznych, które zaspokajały potrzeby operacyjne. Byty takie traktowane były początkowo jako *quasi*-obiekty, a dopiero później, na ogół po znalezieniu odpowiedniej interpretacji, uznawane za pełnoprawne obiekty matematyczne. Analogicznie można zinterpretować kwestię pojawienia się ułamków - taktowanych początkowo jako niepełnowartościowe liczby ułomne, liczb niewymiernych - uznanych za irracjonalne, czy liczb zespolonych - nazywanych początkowo urojonymi. Zauważmy, iż takie metodologiczne analizy w istotny sposób pogłębiają rozumienie ogólnego pojęcia liczby i przez to przyczyniają się do twórczego jego uogólnienia (co już nastąpiło w koncepcjach: liczb zwanych kwaternionami, liczb pozaskończonych czy rachunku macierzowym).

Aby lepiej wyjaśnić znaczenie analiz metodologicznych dla procesu rozumienia, przywołajmy sytuację, jaka w latach trzydziestych XX wieku zaistniała w związku z ogłoszeniem słynnego dziś *Twierdzenia Gödla*. Wiadomo, iż po raz pierwszy Gödel przedstawił swoje epokowe odkrycie podczas konferencji z zakresu epistemologii, która odbyła się w 1930 r. w Królewcu. Do zrozumienia tego twierdzenia niezbędna jest znajomość i rozumienie pojęć takich jak: niesprzeczność systemu, paradoks Richarda, formalizacja, arytmetyzacja, numeracja gödlowska, formuła gödlowska (nie mówiąc

[6] Por. A. Lubomirski: *O uogólnieniu w matematyce.* Wrocław 1983.

o podstawowych w tym momencie kategoriach logicznych). Ponadto konieczne jest uchwycenie struktury dowodu tego twierdzenia. Oznacza to, że jak w każdym przypadku procesu rozumienia, bardzo ważna jest płaszczyzna teoretyczna. Jednakże można prześledzić krok po kroku ten dowód i jakoby „zrozumieć" jego ideę, ale jednocześnie nie pojąć, skąd takie twierdzenie się wzięło i po co; nie uchwycić ani znaczenia tego twierdzenia, ani konsekwencji z niego wypływających. Do takiego wniosku skłania brak reakcji na to twierdzenie ze strony innych uczestników tej konferencji. Analiza wystąpienia Rudolfa Carnapa podczas tejże konferencji, skłania komentatorów do stwierdzenia, że nie zdawał on sobie sprawy z tego, że ma do czynienia z przełomowym odkryciem[7]. Natomiast Hans Reichenbach w swoim sprawozdaniu z tej konferencji zamieszczonym w „Die Naturwissenschaften" nie odnotował wcale wystąpienia Gödla. Trudno tych wielkich uczonych posądzać o niezdolność do zrozumienia procedury dowodzenia zaproponowanej przez Gödla, toteż stawiam tezę, iż to właśnie nieznajomość tła problemu uniemożliwiła im pełne zrozumienie treści twierdzenia Gödla. Nie da się go dogłębnie zrozumieć bez historycznego rozpoznania problemów, które doprowadziły do postawienia kwestii niesprzeczności matematyki oraz uwarunkowań typu metodologicznego, związanych z zagadnieniem dopuszczalnych metod i reguł dowodzenia, co wiąże się z sytuacją, jaka panowała w matematyce po wystąpieniu Hilberta w 1900 r. z jego osławionym *Programem,* w którym postawił on matematykom 23 problemy do rozwiązania. To dlatego, że obecnie z perspektywy czasu, jaki upłynął od momentu opublikowania słynnego artykułu Gödla, dysponujemy wyższą świadomością metodologiczną oraz głębszą wiedzą historyczną, możemy zrozumieć to twierdzenie lepiej niż (początkowo) nawet słynni filozofowie i matematycy współcześni Gödlowi.

Spróbujmy na koniec zasygnalizować, jak - w moim przekonaniu - problem rozumienia matematyki należy widzieć w płaszczyźnie filozoficznej. Wpierw krótko zaprezentuję, co jest według mnie podstawowym i głównym problemem filozoficznym związanym z matematyką. Filozofia nie jest być może nauką *sensu stricto,* jest natomiast dla mnie rodzajem wiedzy dotyczącej rzeczywistości, czyli tego, co istnieje. Tak więc typowo filozoficznym podejściem w stosunku do matematyki będzie pytanie o jej miejsce i rolę w zdobywaniu wiedzy o świecie przyrody. Pogląd, że matematyka jest ezoteryczną sztuką dla sztuki jeszcze nie tak dawno głoszony przez niektórych matematyków, uznać należy za swoistą ideologię „klasy matematycznej". Wiadomo bowiem, że matematyka jest bardzo istotnym elementem

[7] Por. J. W. Dawson, Jr.: *The Reception of Gödel's Incompleteness Theorems,* w: *Gödel's Theorem in Focus,* pod red. S. G. Shanker. London, Croom Helm, 1988, s. 77 (podaję za: J. Życiński: *Granice racjonalności.* Warszawa 1993, s. 63).

współczesnego przyrodoznawstwa. Obecnie powszechnie uważa się, że matematyka sama w sobie ma sens o tyle, o ile jest użyteczna. Nie należy zresztą tej użyteczności pojmować zbyt prosto, jako czysto specjalistyczne jej zastosowania. Matematyka jest bowiem, w pewnym sensie, także nauką o „narzędziach poznania" - kategoriach stosowanych w naukach empirycznych. Właśnie dlatego wyjaśnienie charakteru efektywności matematyki w procesie zdobywania wiedzy naukowej byłoby uzyskaniem pełniejszego zrozumienia „tła" matematyki, co z kolei pozwoliłoby zachować odpowiednie proporcje w zachwytach nad wiedzą matematyczną. Ten punkt widzenia jest jedynym, jak sądzę, w świetle którego moglibyśmy w miarę prawidłowo, niedogmatycznie, niearbitralnie rozpatrywać inne „klasyczne" problemy filozofii matematyki, takie jak: natura obiektów matematycznych, sposób ich istnienia oraz kwestia dopuszczalnych sposobów ich poznawania.