EDUKACJA FILOZOFICZNA POLSKA FILOZOFIA POWOJENNA
Vol. 29 2000

JAN ZYGMUNT
Uniwersytet Wrocławski

ALFRED TARSKI

I. DZIEŁA. *Uwaga wstępna.* Najobszerniejszą bibliografię prac Tarskiego, w opracowaniu Stevena Givanta, z uzupełnieniami i w przekładzie Jana Zygmunta, znaleźć można w **[95m]**, tj. w: A. Tarski: *Pisma logiczno-filozoficzne,* t. I: *Prawda.* (Wyjaśnienie symbolu typu **[95m]** podamy za chilę.) Bibliografia ta obejmuje wszystkie prace Tarskiego, które zostały opublikowane do roku 1994; podane są jednocześnie informacje o przedrukach, wznowieniach, przekładach i recenzjach. (Z dzisiejszego punktu widzenia nie jest to jednak bibliografia kompletna, bowiem od wspomnianego momentu ukazały się nie tylko nowe przekłady bądź wznowienia niektórych prac, ale i rzeczy wcześniej niepublikowane, np. listy Tarskiego do Gödla.) W bibliografii zawartej w **[95m]** publikacje są podzielone na 9 części: artykuły, abstrakty, monografie (do których zalicza się też zbiory prac), problemy i zadania, głosy w dyskusji, recenzje, prace redaktorskie, raporty z badań i listy. W każdej części publikacje ułożone są chronologicznie i oznaczone symbolem bibliograficznym składającym się z nawiasów kwadratowych, cyfr i ewentualnie liter, które mogą występować we frakcji górnej. Podstawowym składnikiem każdego symbolu są dwie cyfry, będące ostatnimi cyframi roku, w którym dana publikacja została ogłoszona. Jeśli w danym roku ukazała się więcej niż jedna pozycja, wtedy do tych cyfr dodajemy jedną z liter „a”, „b”, „c”,..., która oznacza drugą, trzecią, czwartą,... publikację w tymże roku. Np. **[36]** oznacza pierwszy artykuł z roku 1936, a **[36m]** pierwszą monografię z tego samego roku; symbol **[47ma]** odsyła nas do drugiej monografii z roku 1947 itd.

Zgodnie ze stosowaną tu konwencją, podajemy poniżej listę najważniejszych dzieł Tarskiego. Będzie to w zasadzie uproszczony i zmodyfikowany fragment bibliografii Givanta i Zygmunta, ale z dwiema pozycjami nowymi: **[99]** i **[99¹].** Dodatkowe informacje w nawiasach kwadratowych mówią o recenzjach; JSL = "The Journal of Symbolic Logic"; MR = "Mathematical Reviews". Bibliografia tu zamieszczona nie obejmuje dzieł Tarskiego nastętujących kategorii: abstraktów, problemów i zadań, głosów w dyskusji, recenzji oraz raportów z badań.

A. Monografie. **[33m]** *Pojęcie prawdy w językach nauk dedukcyjnych.* „Prace Towarzystwa Naukowego Warszawskiego, Wydział III Nauk Matematyczno-fizycznych”, nr. 34, Warszawa 1933, VII + 116 s. + errata; **[35m]** *Geometrja dla trzeciej klasy gimnazjalnej* (współautorzy: Z. Chwiałkowski i W. Schayer). Państwowe Wydawnictwo Książek i Pomocy Szkolnych, Lwów 1935, 108 s. (drugie wyd., Sekcja Wydawnicza Armii Polskiej na Wschodzie w Jerozolimie, 1944, 108 s. Przedruk nakładem Polskiego Związku Wychodźctwa Przymusowego w Hanowerze, Hanower 1946); **[36m]** *O logice matematycznej i metodzie dedukcyjnej.* „Bibljoteczka matematyczna”, t. 3-5, Książnica-Atlas, Lwów - Warszawa 1936, 167 s.; **(1)** *Einführung in die mathematische Logik und in die Methodologie der Mathematik.* Julius Springer Verlag, Wien 1937, X + 166 s. (niemiecki przekład **[36m])** [JSL 3, s. 51-52]; **[41m]** *Introduction to Logic and to the Methodology of Deductive Sciences.* Oxford University Press, Oxford - New York 1941, XVIII + 239 s. (poszerzony i poprawiony przekład angielski **[36m] (1)** O. Helmera.) [MR 2, s. 209; JSL 6, s. 30-32]; **(1)** Drugie, poprawione wydanie **[41m],** 1946, XVIII + 239 s. [JSL 12, s. 61]; **(18)** Czwarte poprawione wydanie **[41m],** red. Jan Tarski, "Oxford Logic Guides", t. 24, Oxford University Press, New York Oxford 1994, XXIV + 229 s.; **(19)** *Wprowadzenie do logiki i do metodologii nauk dedukcyjnych,* Filia UW w Białymstoku-Philomath-Aleph, Warszawa 1996, XXVI + 261 (przekład **[41m] (18)** Moniki Sujczyńskiej). [Książka **[41m]** przetłumaczona została ponadto na język rosyjski, hiszpański (trzy wydania), włoski, holenderski, hebrajski (dwa wydania), francuski, bułgarski, szwedzki, niemiecki (pięć wydań), czeski, gruziński, serbskochorwacki].

[47“] *Direct Decompositions of Finite Algebraic Systems* (współautor: B. Jónsson) "Notre Dame Mathematical Lectures", t. 5, University of Notre Dame Press, Notre Dame, Indiana 1947, VI + 64 s. + errata. [MR 8, s. 560]; **[48“]** *A Decision Method for Elementary Algebra and Geometry* (przygotowane do druku przez J. C. C. McKinsey’a) U. S. Air Force Project RAND, R-109, the RAND Corporation, Santa Monica, California 1948, IV + 60 s. [MR 10, s. 499; JSL 14, s. 188]; **(1)** Drugie, poprawione wydanie **[48m]** (przygotowane do druku przy pomocy J. C. C. McKinsey’a), University of California Press, Berkeley - Los Angeles, California 1951, III + 63 s. [MR 13, s. 423; JSL 17, s. 207]; **[49“]** *Cardinal Algebras,* wraz z dodatkiem *Cardinal products of isomorphism types* **(B.** Jónssona i A. Tarskiego). Oxford University Press, Oxford - New York 1949, XII + 327s. [MR 10, s. 686; JSL 14, s. 188-189]; **[53m]** *Undecidable Theories* (współautorzy: A. Mostowski i R. M. Robinson). North-Holland Publishing Co., Amsterdam 1953, XII + 98 s. [MR 15, s. 3 84; JSL 24, s. 167-169]; **[56m]** *Logic, Semantics, Metamathematics. Papers from 1923 to 1938.* Clarendon Press, Oxford 1956, XIV + 471 s. (przełożył J. H. Woodger). [MR 17, s. 1171; JSL 34, s. 99-106]; **(1)** Drugie, poprawione wydanie ze wstępem i analitycznym indeksem pojęć oraz pod redakcją J. Corcorana. Hackett Publishing Co., Indianapolis, Indiana 1983, XXX + 506 s. Dodruk (1) z nieznacznymi poprawkami, 1990;

[56^{m}a] *Ordinal Algebras,* z dwoma dodatkami: (1) C. C. Chang: *Some additional theorems on ordinal algebras* oraz (2) B. Jönsson: *A unique decomposition theorem for relational addition.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam 1956, 133 s. [MR 18, s. 632; JSL25, s. 156-158.]; **[67^{m}]** *An Extended Arithmetic of Ordinal Numbers* (współautor J. Doner). System Development Corporation, report SP-2811/000/00, Santa Monica, California, 58 s. [MR 39 # 5374.] (patrz **[69a].); [67^{m}a]** *The Completeness of Elementary Algebra and Geometry.* Institute Blaise Pascal, Paris 1967, IV + 50 s. (jest to reprint ze szczotek korektorskich pracy, która miała się. ukazać w r. 1940 w "Actualités Scientifiques et Industrielles", Hermann et C^{ie}, Paryż, ale z powodu wojny druk nie doszedł do skutku); [71^{m}] *Cylindric Algebras. Part I. With an Introductory Chapter: General Theory of Algebras* (współautorzy: L. Henkin i J. D. Monk). North-Holland Publishing Co., Amsterdam 1971, VI + 508 s. [MR 47 # 3171]; **[72^{m}]** *Logique, sémantique, métamathématique: 1923-1944.* T. 1, "Philosophies pour l'Age de la Science' '. Librairie Armand Colin, Paris 1972, VIII + 276 s. (francuskie wydanie części **[56^{m}]:** artykułów I -VIII pod kierunkiem G. Grangera); **[74m]** *Logique, sémantique, métamathématique: 1923-1944.* T. 2, 'Philosophies pour l'Âge de la Science". Librairie Armand Colin, Paris 1974, 331 s. (francuskie wydanie części **[56^{m}]:** artykułów IX-XVII, i dodatkowych artykułów XVIII-XXI (będących przekładami **[39c], [41], [44a]** i **[67^{m}a])** pod kierunkiem G. Grangera; **[81^{m}]** *Cylindric Set Algebras* (współautorzy: H. Andréka, L. Henkin, J. D. Monk, I. Németi). "Lecture Notes in Mathematics", t. 883, Springer-Verlag, Berlin-New Yorkl981, VIII + 323 s.; **[81^{m}a]** *The Collected Works of Alfred Tarski.* T. l, *1921-1934;* t. 2, *1935-1944;* t. 3, *1945- 1957;* t. 4, *1958-1979.* Redaktorzy: S. R. Givant i R. N. McKenzie, University of California, Berkeley, California 1981, VII + 666 s. (t 1), VI + 700 s. (t. 2), VI + 682 s. (t. 3), XIII + 737 s. (t. 4). (Nakład bardzo ograniczony. Przedrukowano jako **[86^{m}]); [83^{m}]** *Metamathematische Methoden in der Geometrie* (współautorzy: W. Schwabhäuser, W. Szmielew.) "Hochschultext", Springer-Verlag, Berlin 1983, VIII + 482 s. [JSL 51, 1073-1075]; **[85^{m}]** *Cylindric Algebras. Part II* (współautorzy: L. Henkin, J. D. Monk). North-Holland Publishing Co., Amsterdam 1985, VII + 302 s.; **[86^{m}]** *The Collected Works of Alfred Tarski.* Volume 1, 1921-1934; Volume 2, 1935-1944; Volume 3, 1945-1957; Volume 4, 1958-1979. Redaktorzy: S. R. Givant i R. N. McKenzie, Birkhäuser, Basel - Boston - Stuttgart 1986, XII + 658 s. (t. 1), XII + 699 s. (t. 2), XIII + 682 s. (t. 3), XII + 757 s. (t. 4). (Przedruk **[81^{m}]**. W tomie 4, s. 729-757, zmieszczony jest reprint pracy: S. Givant: *Bibliography of Alfred Tarski* (JSL, 45, nr 4 (1986)). Bibliografia, o której mówimy powyżej w uwadze wstępnej, jest właśnie rozszerzoną i uaktualnioną wersją bibliografii Givanta).

[87m] *A Formalization of Set Theory without Variables* (współautor: S. R. Givant). "American Mathematical Society Colloquium Publications", t. 41, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island 1987, XXI + 318 s.; **[94m]** *Pisma logiczno-filozoficzne.* Tom 1: *Prawda.* Wybrał, przełożył, redakcji naukowej dokonał, wstępem i przypisami opatrzył J. Zygmunt. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1995, XXIV + 390 s + errata (krytyczne wydanie wszystkich prac Tarskiego o prawdzie i semantyce).

B. Artykuły (wybór). **[21]** *Przyczynek do aksjomatyki zbioru dobrze uporządkowanego.* „Przegląd Filozoficzny", t. 24 (1921), s. 85-94; **[23]** *O wyrazie pierwotnym logistyki.* Teza Doktorska. „Przegląd Filozoficzny", t. 26 (1923), s. 68-89; **(1)** *On the primitive term of logistic.* **W: [56m],** s. 1-23 (poprawiony przekład angielski [23], uwzględniający modyfikacje wprowadzone w **[23a]** i **[24]); [23a]** *Sur le terme primitif de la logistique.* "Fundamenta Mathematicae", t. 4 (1923), s. 196-200 (wydanie francuskie części **[23]); [24]** *Sur les truth-functions au sens de MM. Russell et Whitehead.* 'Fundamenta Mathematicae", t. 5 (1924), s. 59-74 (francuskie wydanie części **[23]); [24a]** *Sur quelques théorèmes qui équivalent à l'axiome du choix.* "Fundamenta Mathematicae", t. 5 (1924), s. 147-154; **[24b]** *O równoważności wielokątów.* „Przegląd Matematyczno-fizyczny", t. 2 (1924), s. 47-60; **[24c]** *Sur les ensembles finis.* 'Fundamenta Mathematicae", t. 6 (1924), s. 45-95; **[24d]** *Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes* (współautor: S. Banach). 'Fundamenta Mathematicae", t. 6 (1924), s. 244-277; **[25]** *Quelques théorèmes sur les alephs.* "Fundamenta Mathematicae", t. 7 (1925), s. 1-14; **[26]** *Communication sur les recherches de la théorie des ensembles* (współautor: A. Lindenbaum). „Sprawozdania z Posiedzeń Towarzystwa Naukowego Warszawskiego, Wydział III Nauk Matematyczno-fizycznych", t. 19 (1926), s. 299-330; **[28]** *Sur la décomposition des ensembles en sous-ensembles presque disjoints.* "Fundamenta Mathematicae", t. 12 (1928), s. 188-205; **[29]** *Les fondements de la géométrie des corps.* W: *Księga Pamiątkowa Pierwszego Polskiego Zjazdu Matematycznego. Lwów 7-10 IX 1927* (dodatek do: „Rocznik Polskiego Towarzystwa Matematycznego"). Kraków 1929, s. 29-33; **[29a]** *Geschichtliche Entwicklung und gegenwärtiger Zustand der Gleichmächtigkeitstheo rie und der Kardinalzahlarithmetik.* W: *Księga Pamiątkowa Pierwszego Polskiego Zjazdu Matematycznego. Lwów 7-10 IX 1927* (dodatek do: „Rocznik Polskiego Towarzystwa Matematycznego"). Kraków, 1929, s. 48-54; **[29b]** *Sur les fonctions additives dans les classes abstraites et leur application au problème de la mesure.* „Sprawozdania z Posiedzeń Towarzystwa Nauko-

wego Warszawskiego, Wydział III Nauk Matematyczno-fizycznych”, t. 22 (1929 - wydane w 1930), s. 114-117 [rozwinięciem jest **[38g]];**

[29c] *Sur la décomposition des ensembles en sous-ensembles presque disjoints. (Supplément à la note sous le même titre du Volume XII de ce Journal).* "Fundamenta Mathematicae", t. 14 (1929), s. 205-215; **[29d]** *Na marginesie „Rozporządzenia Prezydenta Rzeczypospolitej o ubezpieczeniu pracowników umysłowych z dnia 24 listopada 1927 r”.* „Ekonomista”, t. 29 (1929), s. 115-119.; **[30]** *Une contribution à la théorie de la mesure.* "Fundamenta Mathematicae", t. 15 (1930), s. 42-50; **[30a]** *Sur une propriété caractéristique des nombres inaccessibles* (współautor: W. Sierpiński). "Fundamenta Mathematicae", t. 15 (1930), s. 292-300; **[30b]** *Über Äquivalenz der Mengen in Bezug auf eine beliebige Klasse von Abbildungen.* W: *Atti del Congresso Internazionale dei Matematici, Bologna 3-10 settembre 1928,* t. 6. Nicola Zanichelli, Bologna 1930, s. 243-252; **[30c]** *Über einige fundamentalen Begriffe der Metamathematik.* „Sprawozdania z Posiedzeń Towarzystwa Naukowego Warszawskiego, Wydział III Nauk Matematyczno-fizycznych”, t. 23 (1930), s. 22-29; **[30d]** *Untersuchungen über den Aussagenkalkül* (współautor: J. Łukasiewicz). „Sprawozdania z Posiedzeń Towarzystwa Naukowego Warszawskiego, Wydział III Nauk Matematyczno-fizycznych”, t. 23 (1930), s. 30-50; **(1)** *Investigations into the sentential calculus.* W: **[56$^{\mathrm{m}}$],** s. 38-59 (poprawiony przekład angielski **[30d]); (3)** *Badania nad rachunkiem zdań.* W: J. Łukasiewicz: Z *zagadnień logiki i filozofii. Pisma wybrane.* Red. J. Słupecki, PWN, Warszawa 1967, s. 129-143 (polski przekład **[30d]** E. Vielrose’go); **[30e]** *Fundamentale Begriffe der Methodologie der deduktiven Wissenschaften. I.* "Monatshefte für Mathematik und Physik", t. 37 (1930), s. 361-404; **(1)** *Fundamental concepts of the methodology of the deductive sciences.* W: **[56$^{\mathrm{m}}$],** s. 60-109 (poprawiony przekład angielski **[30e]); [30f]** *Sur les classes d’ensembles closes par rapport à certaines opérations élémentaires.* "Fundamenta Mathematicae", t. 16 (1930), s. 181-304; **[31]** *Sur les ensembles définissables de nombres réels. I.* 'Fundamenta Mathematicae", t. 17 (1931), s. 210-239 (rozwinięciem są prace **[48$^{\mathrm{m}}$]** i **[67$^{\mathrm{m}}$a]); (1)** *On definable sets of real numbers.* W: **[56$^{\mathrm{m}}$],** s. 110-142 (poprawiony przekład angielski **[31]); [31a]** *Les opérations logiques et les ensembles projectifs* (współautor: K. Kuratowski). 'Fundamenta Mathematicae", t. 17 (1931), s. 240-248; **[31b]** *O stopniu równoważności wielokątów.* „Młody Matematyk”, t. l (dodatek do: „Parametr”, t. 2) (1931), s. 37-44; **[31/32]** *Teoria długości okręgu w szkole średniej.* „Parametr”, t. 2 (1931-1932), s. 257--267; **[31/32a]** *Uwagi o stopniu równoważności wielokątów,* parametr”, t. 2 (1931-1932), s. 310-314; **[33]** *Einige Betrachtungen über die Begriffe der ω-Widerspruchsfreiheit und der ω-Vollständigkeit.* "Monatshefte für Mathematk und Physik", t. 40 (1933), s. 97-112;

[34] *Z badań metodologicznych nad definjowalnością terminów.* „Przegląd Filozoficzny”, t. 37 (1934), s. 438-460; **[35]** *Zur Grundlegung der Boole’schen Algebra. I.* "Fundamenta Mathematicae", t. 24 (1935), s. 177-198; **(1)** *On the foundations of Boolean algebra.* W: **[56^{m}],** s. 320-341 (poprawiony przekład angielski **[35]);** **[35a]** *Grundzüge des Systemenkalküls. Erster Teil.* "Fundamenta Mathematicae", t. 25 (1935), s. 503-526; **(1)** *Foundations of the calculus of Systems.* W: **[56^{m}]**, s. 342-383 (poprawiony przekład angielski **[35a]** i **[36d]);** **[35b]** *Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen.* "Studia Philosophica", t. 1 (1935), s. 261-405 (niemiecki przekład **[33^{m}]** L. Blausteina, z dodatkiem. Wydrukowano też w postaci oddzielnego tomu we Lwowie, 1935, 145 s.; **(1)** *The concept of truth in formalized languages.* W: **[56^{m}],** s. 152-278 (poprawiony przekład angielski **[35b]);** **[35d]** *Wahrscheinlichkeitslehre und mehrwertige Logik.* "Erkenntnis", t. 5 (1935), s. 174-175; **[36]** *O ugruntowaniu naukowej semantyki.* „Przegląd Filozoficzny”, t. 39 (1936), s. 50-57 [artykuł był tłumaczony na język niemiecki, francuski, włoski, grecki]; **[36a]** *O pojęciu wynikania logicznego.* „Przegląd Filozoficzny”, t. 39 (1936), s. 58-68 [recenzja niemieckiego przekładu w JSL 2, s. 83]; **[36b]** *Uber die Beschränktheit der Ausdrucksmittel deduktiver Theorien* (współautor: A. Lindenbaum). "Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums", t. 7 (1936), s. 15-22. [JSL 1, s. 115]; **(1)** *On the limitations of the means of expression of deductive theories.* W: **[56^{m}],** s. 384-392 (poprawiony przekład angielski **[36b]);** **[36c]** *Über die Erweiterungen der unvollständigen Systeme des Aussagenkalküls.* "Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums", t. 7 (1936), s. 51-57. [JSL 1, s. 116]; **(1)** *On extensions of incomplete Systems of the sentential calculus.* W: **[56^{m}],** s. 393-400 (poprawiony przekład angielski **[36c]);** **[36d]** *Grundzüge des Systemenkalküls. Zweiter Teil.* 'Fundamenta Mathematicae", t. 26 (1936), s. 283- 301. [JSL 1, **s. 71];** **[36e]** *Sur les classes d’ensembles closes par rapport aux opérations de Hausdorff.* "Fundamenta Mathematicae", t. 27 (1936), s. 277-288; **[36h]** *Ideale in den Mengenkörpern.* „Rocznik Polskiego Towarzystwa Matematycznego”, t. 15 (1936-wydane w 1937), s. 186-189 [JSL3, s. 47]; **[37]** *Über additive und multiplikative Mengenkörper und Mengenfunktionen.* „Sprawozdania z Posiedzeń Towarzystwa Naukowego Warszawskiego, Wydział III Nauk Matematyczno-fizycznych”, t. 30 (1937), s. 151-181; **[37a]** *Sur la méthode déductive.* W: *Travaux du IX^{e} Congrès International de Philosophie,* t. 6, „Actualités Scientifiques et Industrielles”, t. 535, Hermann et C^{ie}, Paris 1937, s. 95-103 [JSL 3, s. 56]; **[37b]** Dodatek E do: J. H. Woodger: *The Axiomatic Method in Biology.* Cambridge University Press, Cambridge, oraz Macmillan, New York 1937, s. 161-172. [JSL 3, s. 42-43]; **[38]** *Einige Bemerkungen zur Axiomatik der Boole’schen Algebra.* „Sprawozdania z Posiedzeń Towarzystwa Naukowego Warszawskiego, Wydział III Nauk Matematyczno-fizycznych, t. 31 (1938), s. 33-35 [JSL 4, s. 135];

[38a] *Über unerreichbare Kardinalzahlen.* "Fundamenta Mathematicae", t. 30 (1938), s. 68-89; **[38b]** *Drei Überdeckkungssätze der allgemeinen Mengenlehre.* "Fundamenta Mathematicae", t. 30 (1938), s. 132-155; **[38c]** *Ein Überdeckungssatz für endliche Mengen.* "Fundamenta Mathematicae", t. 30 (1938), s. 156-163; **[38d]** *Eine äquivalente Formulierung des Auswahlaxioms.* 'Fundamenta Mathematicae", t. 30 (1938), s. 197-201; **[38e]** *Über das absolute Maß linearer Punktmengen.* "Fundamenta Mathematicae", t. 30 (1938), s. 218-234; **[38f]** *Ein Beitrag zur Axiomatik der Abelschen Gruppen.* "Fundamenta Mathematicae", t. 30 (1938), s. 253-256; **[38g]** *Algebraische Fassung des Maßproblems.* "Fundamenta Mathematicae", t. 31 (1938), s. 47--66; **[38h]** *Der Aussagenkalkül und die Topologie.* 'Fundamenta Mathematicae", t. 31 (1938), s. 103-134 [JSL 4, s. 26-27]; **(1)** *Sentential calculus and topology.* W: **[56^{m}],** s. 421-454 (poprawiony przekład angielski **[38h]); [39]** *Ideale in vollständigen Mengenkörpern. I.* "Fundamenta Mathematicae", t. 32 (1939), s. 45-63 **[MR** 8, s. 193]; **[39a]** *Boolesche Ringe mit geordneter Basis* (współautor A. Mostowski). 'Fundamenta Mathematicae", t. 32 (1939), s. 69--86 [JSL 4, s. 124-125]; **[39b]** *On well-ordered subsets of any set.* "Fundamenta Mathematicae", t. 32 (1939), s. 176-183; **[39c]** *On undecidable statements in enlarged systems of logic and the concept of truth.* "The Journal of Symbolic Logic", t. 4(1939), s. 105-112; [MR 1, s. 34; JSL 5, s. 115-116]; **[41]** *On the calculus of relations.* "The Journal of Symbolic Logic", t. 6 (1941), s. 73-89 **[MR** 3, s. 130; JSL 7, s. 38]; **[43]** *On families of mutually exclusive sets* (współautor R Erdös). "Annals of Mathematics", t. 44 (1943), s. 315-329 [MR 4, s. 269]; [44] *The algebra of topology* (współautor: J. C. C. McKinsey). "Annals of Mathematics", t. 45 (1944), s. 141-191 [MR 5, s. 211; JSL 9, s. 96-97]; **[44a]** *The semantic conception of truth and the foundations of semantics.* "Philosophy and Phenomenological Research", t. 4 (1944), s. 341-375 [MR 6, s. 31; JSL 9, s. 68]; **(19)** *Semantyczna koncepcja prawdy i podstawy semantyki.* W: **[94^{m}],** s. 228-282 (polski przekład **[44a]).** [Artykuł **[44a]** był wielokrotnie przedrukowywany i tłumaczony na wiele języków]; **[45]** *Ideale in vollständigen Mengenkörpern. II.* "Fundamenta Mathematicae”, t. 33 (1945), s. 51-65. **[MR** 8, s. 193]; **[46]** *On closed elements in closure algebras* (współautor J. C. C. McKinsey). "Annals of Mathematics", t. 47 (1946), s. 122-162 [MR 7, s. 359; JSL 11, s. 83-84]; **[46a]** *A remark on functionally free algebras.* "Annals of Mathematics", t. 47 (1946), s. 163-165 **[MR** 7, s. 360; JSL 11, s. 84-85]; **[48]** *Some theorems about the sentential calculi of Lewis and Heyting* (współautor J. C. C. McKinsey). "The Journal of Symbolic Logic", t. 13 (1948), s. 1-15 [MR 9, s. 486; JSL 13, s. 171-172];

[48a] *A problem concerning the notion of definability.* "The Journal of Symbolic Logic", t. 13(1948), s. 107-111 [MR 10, s. 176; JSL13, s. 172-173]; **[48b]** *Axiomatic and algebraic aspects of two theorems on sums of cardinals.* "Fundamenta Mathematicae", t. 35 (1948), s. 79-104 [MR 10, p. 687; JSL 14, s. 257-258]; **[48c]** *Measures in Boolean algebras* (współautor: A. Hom). "Transactions of the American Mathematical Society", t. 64 (1948), s. 467-497. [MR 10, s. 518]; **[49]** *Cancellation laws in the arithmetic of cardinals.* "Fundamenta Mathematicae", t. 36 (1949), s. 77-92. [MR 11, s. 335]; **[51]** *Distributive and modular laws in the arithmetic of relation algebras* (współautorka: L. H. Chin.). "University of California Publications in Mathematics", New Series, t. l, nr 9 (1951), s. 341-3 84 [MR 13, s. 312; JSL 18, s. 72]; **[51a]** *Boolean algebras with operators. Part I.* (współautor: B. Jónsson). "American Journal of Mathematics", t. 73 (1951), s. 891-939 [MR 13, s. 426; JSL 18, s. 70-71]; **[52]** *Boolean algebras with operators. Part II.* (współautor: **B.** Jónsson). "American Journal of Mathematics", t. 74 (1952), s. 127-162 [MR 13, s. 524; JSL 18, s. 70-71]; **[52a]** *Some notions and methods on the borderline of algebra and metamathematics.* W: *Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Cambridge, Massachusetts, U. S. A., August 30-September 6, 1950,* t. 1, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island 1952, s. 705-720 [MR 13, s. 521; JSL 18, s. 182]; **[52b]** *Mutual interpretability of some essentially undecidable theories* (współautorka: W. Szmielew). W: *Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Cambridge, Massachusetts, U. S. A., August 30-September 6, 1950*, t. 1, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island 1952, s. 734; **[52c]** *On algebras whose factor algebras are Boolean* (współautor: J. M. G. Fell). "Pacific Journal of Mathematics", t. 2 (1952), s. 297-318 [MR 14, s. 130]; **[54]** *Theorems on the existence of successors of cardinals, and the axiom of choice.* "Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, Proceedings, Series A, Mathematical Sciences", t. 57 (= "Indagationes Mathematicae", t. 16) (1954), s. 26- 32 [MR 15, s. 689]; **[54a]** *Contributions to the theory of models. I.* "Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, Proceedings, Series A, Mathematical Sciences", t. 57 (= "Indagationes Mathematicae", t. 16) (1954), s. 572-581 [MR 16, s. 554; JSL 21, s. 405-406]; **[54b]** *Contributions to the theory of models. II.* "Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, Proceedings, Series A, Mathematical Sciences", t. 57 (= „Indagationes Mathematicae", t. 16) (1954), s. 582-588 [MR 16, s. 554; JSL 21, s. 405-406]; **[55]** *Contributions to the theory of models. III.* "Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, Proceedings, Series A, Mathematical Sciences", t. 58 (= "Indagationes Mathematicae", t. 17) (1955), s. 56-64 [MR 16, s. 554; JSL 21, s. 405-406];

[55a] *A lattice-theoretical fixpoint theorem and its applications.* "Pacific Journal of Mathematics", t. 5 (1955), s. 285-309 [MR 17, s. 574; JSL 22, s. 370]; **[56]** *The fundamental ideas of pansomatism* (angielski przekład pracy T. Kotarbińskiego *Zasadnicze myśli pansomatyzmu.* Współautor przekładu: David Rynin). "Mind", New Series, t. 64 (1955), s. 488-500, oraz t. 65 (1956), s. 288; **[56a]** *Equationally complete rings and relation algebras.* "Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, Proceedings, Series A, Mathematical Sciences", t. 59 (= „Indagationes Mathematicae", t. 18) (1956), s. 39-46 [MR 18, s. 636; JSL 23, s. 53]; **[56b]** *Equilaterality as the only primitive notion of Euclidean geometry* (współautor: E. W. Beth). "Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, Proceedings, Series A, Mathematical Sciences", t. 59 (= "Indagationes Mathematicae", t. 18) (1956), s. 462-467 [MR 18, s. 328; JSL 33, s. 289]; **[56c]** *A general theorem concerning primitive notions of Euclidean geometry.* "Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, Proceedings, Series A, Mathematical Sciences", t. 59 (= "Indagationes Mathematicae", t. 18) (1956), s. 468-474 [MR 18, s. 328; JSL 33, s. 289]; [57] *Higher degrees of distributivity and completeness in Boolean algebras* (współautor: E. C. Smith, Jr.). "Transactions of the American Mathematical Society", t. 84 (1957), s. 230-257 [MR 18, s. 865; JSL 24, s. 59-60]; **[57a]** *Arithmetical extensions of relational systems* (współautor: R. L. Vaught). "Compositio Mathematica", t. 13 (1957), s. 81-102 [Patrz "Fundamenta Mathematicae", t. 23 (1934), s. 161; MR 20 # 1627; JSL 32, s. 131]; **[57b]** *Remarks on direct products of commutative semigroups.* "Mathematica Scandinavica", t. 5 (1957), s. 218-223 [MR 21 # 7168]; **[58]** *The sentential calculus with infinitely long expressions* (współautor: D. S. Scott). "Colloquium Mathematicum", t. 6(1958), s. 165-170 [MR 20 # 6350; JSL 30, s. 95]; **[58a]** *Remarks on predicate logic with infinitely long expressions.* "Colloquium Mathematicum", t. 6 (1958), s. 171-176 [MR 20 # 6351; JSL 3 0, s. 94-95]; **[59]** *What is elementary geometry?* W: *The Axiomatic Method, with Special Reference to Geometry and Physics,* Red. L. Henkin, P. Suppes i A. Tarski. North-Holland Publishing Co., Amsterdam 1959, s. 16-29 **[MR** 21 # 4919; **JSL** 27, s. 93]; **[61]** *On two properties of free algebras (współautor*. B. Jónsson.). "Mathematica Scandinavica", t. 9 (1961), s. 95-101 [MR 23 # A3695]; **[61a]** *Cylindric algebras* (współautor: L. Henkin). W: *Lattice Theory.* "Proceedings of Symposia in Pure Mathematics", t. 2, red. R. P. Dilworth. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island 1961, s. 83-113 [MR 23 #A1564; JSL 32, s. 415- 416]; **[61b]** *On some problems involving inaccessible cardinals* (współautor: P. Erdös). W: *Essays on the Foundations of Mathematics,* Red. Y. Bar-Hillel, E. I. J. Poznański, M. O. Rabin i A. Robinson. Magnes Press, Jerusalem 1961, s. 50-82 [MR 29 # 4695]; **[62]** *Some problems and results relevant to the foundations of* *set theory*. W: *Logic, Methodology, and Philosophy of Science. Proceedings of the 1960 International Congress*, red. E. Nagel, P. Suppes i A. Tarski. Stanford University Press, Stanford, California 1962, s. 125-135 [MR 27 # 1382; JSL 30, s. 95-96]; **[64]** *From accessible to inaccessible cardinals. Results holding for all accessible cardinal numbers and the problem of their extension to inaccessible ones* (współautor: H. J. Keisler). "Fundamenta Mathematicae", t. 53 (1964), s. 225-308 [MR 29 # 3385; JSL 32, s. 411]; **(1)** *Corrections to the paper "From accessible to inaccessible cardinals"* (współautor: H. J. Keisler). Ibid., t. 57 (1965), s. 119. **[MR** 31# 3340]; **[64a]** *Refinement properties for relational structures* (współautorzy: C. C. Chang, B. Jónsson). "Fundamenta Mathematicae", t. 55 (1964), s. 249-281 [MR 30 # 3029];

[65] *A simplified formalization of predicate logic with identity.* "Archiv für mathematische Logik und Grundlagenforschung", t. 7 (1965), s. 61-79 [MR 34# 2437; JSL 39, s. 602-603]; **[65a]** *Metamathematical properties of some affine geometries* (współautor L. W. Szczerba). W: *Logic, Methodology and Philosophy of Science. Proceedings of the 1964 International Congress,* Red. Y. Bar-Hillel. North-Holland Publishing Co., 1965, s. 166-178 (rozszerzoną wersją jest **[79])** **[MR** 35 # 843; JSL 36, s. 333-334]; **[68]** *Equational logic and equational theories of algebras.* W: *Contributions to Mathematical Logic. Proceedings of the Logic Colloquium, Hannover 1966.* Red. H. A. Schmidt, K. Schütte i H. J. Thiele. North-Holland Publishing Co., Amsterdam 1968, s. 275-288 [MR 38 #5692; JSL 36, s. 161-162]; **[69]** *Truth and proof.* "Scientific American", t. 220 (6) (1969), s. 63-77 [artykuł był wielokrotnie przedrukowywany i tłumaczony na inne języki. W kolejnych edycjach autor wnosił rozmaite poprawki. Są one uwzględnione w przekładzie polskim, zawartym w: **[94^{m}];** **[69a]** *An extended arithmetic of ordinal numbers* (współautor: J. Doner). "Fundamenta Mathematicae", t. 65 (1969), s. 95--127 (poprawiona wersja pracy **[67^{m}])** [MR 39 # 5374]; **[75]** *An interpolation theorem for irredundant bases of closure structures.* "Discrete Mathematics", t. 12(1975), s. 185-192; **[78]** *The elementary theory of well-ordering - A metamathematical study* (współautorzy: J. Doner, A. Mostowski). W: *Logic Colloquium '77.* Red. A. MacIntyre, L. Pacholski, J. Paris. North-Holland Publishing Co., Amsterdąm 1978, s. 1-54 [MR 80d, 03027a]; **[79]** *Metamathematical discussion of some affine geometries* (współautor: L. W. Szczerba). "Fundamenta Mathematicae", t. 104(1979), s. 155-192. [MR81a, 03012]; **[86]** *What are logical notions?* Wstęp i redakcja: J. Corcoran. "History and Philosophy of Logic", t. 7 (1986), s. 143-154; **[86a]** *Representable cylindric algebras* (współautorzy: L. Henkin i J. D. Monk). "Annals of Pure and Applied Logic", 31 (1986), 23-60;

[93] *Sur la théorie des modèles.* "L'Âge de la Science. Lectures philosophiques", t. 5, *Philosophie de la logique et philosophie du language*, Editions Odile Jacob, Paris 1993, s. 137-158 (francuski przekład wykładu, który A. Tarski wygłosił na 70. międzynarodowym kolokwium CNRS "Le Raisonnement en mathématiqus et en sciences experimentales", Paryż, 26. 09--1. 10. 1955; redakcja: Anne Preller); **[99]** *Tarski's system of geometry* (współautor: S. Givant). "The Bulletin of Symbolic Logic", t. 5 (1999), s. 175-214.

C. Prace edytorskie. [59e] *The Axiomatic Method, with Special Reference to Geometry and Physics* (współredaktorzy: L. Henkin i P. Suppes). North-Holland Publishing Co., Amsterdam 1959, XI + 488 s.; **[62e]** *Logic, Methodology and Philosphy of Science. Proceedings of the 1960 International Congress* (współredaktorzy: E. Nagel i P. Suppes). Stanford University Press, Stanford, California 1962, IX + 661 s.; **[65e]** *The Theory of Models. Proceedings of the 1963 International Symposium at Berkeley* (współreda- ktorzy: J. W. Addison i L. Henkin). North-Holland Publishing Co., Amsterdam 1965, XV + 494 ss. [MR 33 # 3878].

D. Listy. [87¹] *A philosophical letter of Alfred Tarski* (with prefatory note by Morton White). "Journal of Philosophy", t. 84 (1987), s. 28-32 (list A. Tarskiego do **M.** White'a z dnia 23 września 1944); **(1)** *List filozoficzny Alfreda Tarskiego do Mortona White'a.* W: **[94m],** s. 283-291 (polski przekład **[87¹]); [92¹]** *Alfred Tarski: Drei Briefe an Otto Neurath* (Herausgegeben und mit einen Vorwort versehen von Rudolf Haller; translated into English by Jan Tarski). "Gratzer Philosophische Studien", t. 43 (1992), s. 1-32 (trzy listy A. Tarskiego do O. Neuratha z 25 kwietnia 1930 r., 10 czerwca 1936 r. oraz 7 września 1936 r. w oryginale niemieckim i tłumaczeniu na angielski); **(1)** *List Alfreda Tarskiego do Ottona Neuratha z po7 września 1936 r.* **W: [94m],** s. 206-213 (polski przekład trzeciego listu A. Tarskiego do O. Neuratha); **[99l]** *Letters to Kurt Gödel, 1942-47* (Translated and edited by Jan Tarski). W: J. Woleński, E. Köhler (red.): *Alfred Tarski and the Vienna Circle. Austro-Polish Connections in Logical Empiricism.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 1999, s. 261-274.

II OPRACOWANIA, KONTYNUACJE, NAWIĄZANIA.

A. Artykuły. W. J. Blok, D. Pigozzi: *Alfred Tarski's work on general metamathematics.* "The Journal of Symbolic Logic", 53 (1988), s. 36-50; S. Burris, S. Lee: *Tarski's high school identities.* "American Mathematical Monthly", 100 (1993), s. 231-284; D. J. Brown, R. Suszko: *Abstract logics.* "Dissertationes Mathematicae", 102 (1973), s. 5-41; A. Church: *Comparison of Russell's resolution of the semantical antinomies with that of Tarski.* "The Journal of Symbolic Logic", 41 (1976), s. 747-760; J. Czelakowski, G. Malinowski: *Key notions of Tarski's methodology of deductive sciences.* „Studia Logica”, 44 (1985), s. 321-351; Lou van den Dries: *Alfred Tarski’s elimination theory for real closed fields.* "The Journal of Symbolic Logic", 53 (1988), s. 7-19; J. Doner, W. Hodges: *Alfred Tarski and decidable theories.* "The Journal of Symbolic Logic", 53 (1988), s. 20-35; J. Etchemendy: *Tarski on truth and logical consequence.* "The Journal of Symbolic Logic", 53 (1988), s. 51-77; H. Field: *Tarski’s theory of truth.* "The Journal of Philosophy", 69 (1972), s. 347-375; H. Friedman, M. Sheard: *An axiomatic approach to self-referential truth.* "Annals of Pure and Applied Logic", 33 (1987), s. 1-21; S. Feferman: *Toward useful type-free theories, 1.* "The Journal of Symbolic Logic", 49 (1984), s. 75-111; S. R. Givant, V. Huber-Dyson: *Alfred Tarski w kalejdoskopie impresji osobistych.* „Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Seria II: Wiadomości Matematyczne”, 32 (1996), s. 95-127; I. Grattan-Guinness: *On Popper’s use of Tarski’s theory of truth.* "Philosophia", 14 (1984), s. 129-135; S. R. Givant: *A portait of Alfred Tarski.* "The Mathematical Intelligencer", 15(1991), s. 16-32; M. Gómez-Torrente: *Tarski on logical consequence.* "Notre Dame Journal of Formal Logic", 37 (1996), s. 125-151; A. Grzegorczyk: *Zmienne języka naturalnego i klasyczne definicje pojęć semantycznych.* W: J. Pelc (red.): *Znaczenie i prawda. Rozprawy semiotyczne.* „Biblioteka Myśli Semiotycznej”, t. 26. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1994, s. 451-460; A. Gupta: *Tarski’s definition of truth.* W: *The Routledge Encyclopedia of Philosophy.* Vol. 9. Routledge, London 1998, s. 256-269; H. Hiż: *Jubileusz Alfreda Tarskiego.* „Kultura” (Paryż), 9 (288) (1971), s. 134-140; W. Hodges: *Truth in a structure.* "The Proceedings of the Aristotelian Society, New Series", 86 (1985/1986), s. 135-151; W. Hodges: *Alfred Tarski.* "The Journal of Symbolic Logic", 51 (1986), s. 866-868; B. Jónsson: *The contributions of Alfred Tarski to general algebra.* "The Journal of Symbolic Logic", 51 (1986), s. 883-889; R. C. Jennings: *Popper, Tarski and relativism.* "Analysis", 43 (1983), s. 118-123; M. Kokoszyńska: *What means „Relativity of Truth”?* "Studia Philosophica", 3 (1948), s. 167-176; S. Kripke: *Outline of a theory of truth.* "The Journal of Philosophy", 72 (1975), s. 690-716; A. Levy: *Alfred Tarski’s work in set theory.* "The Journal of Symbolic Logic", 51 (1986), s. 2-6; J. Łoś: *O Alfredzie Tarskim.* „Ruch Filozoficzny”, 43 (1986), s. 3-10; V. McGee: *Two problems with Tarski’s theory of consequence.* "Proceedings of the Aristotelian Society, New Series", 42 (1993), s. 273-292; J. C. C. McKinsey: *A new definition of truth.* "Syntèse", 7 (1948-1949), s. 428-433; G. F. McNulty: *Alfred Tarski and undecidable theories.* "The Journal of Symbolic Logic", 51 (1986), s. 890-898; D. Monk: *The contributions of Alfred Tarski to algebraic logic.* "The Journal of Symbolic Logic", 51 (1986), s. 899-905; L. F. Moreno: *Tarski and the concept of logical constant.* "Logique et Analyse. Nouvelle Série", 131-132 (1990), s. 203-214; A. Mostowski: *Tarski, Alfred.* W: *The*

Encyclopedia of Philosophy, The Macmillan Company and The Free Press, New York 1967, t. 8, s. 77-81. A. Nowaczyk: *Czy Tarski zdefiniował pojęcie prawdy?* „Przegląd Filozoficzny - Nowa Seria”, 7, Nr 2(26), (1998), s. 5-29; W. A. Pogorzelski, S. J. Sunna: Recenzja **[56m]**. 'The Journal of Symbolic Logic", 34(1969), s. 99-106;

W. V. Quine: *On an application of Tarski’s theory of truth.* "Proceedings of the National Academy of Sciences", 38 (1952), s. 430-433; R. Suszko: *W sprawie antynomii kłamcy i semantyki języka naturalnego.* „Zeszyty Naukowe Wydziału Filozoficznego Uniwersytetu Warszawskiego”, 3 (1957), PWN, s. 49-56; J. M. Sagüillo: *Logical consequence revisited.* "The Bulletin of Symbolic Logic", 3 (1997), s. 216-241; P. Suppes: *Philosophical implications of Tarski’s work.* "The Journal of Symbolic Logic", 53 (1988), s. 80-91; S. J. Surma: *On the origin and subsequent applications of the concept of the Lindenbaum algebra.* W: *Logic, Methodology and Philosophy of Science, VI (Hannover 1979).* North-Holland, Amsterdam 1982, s. 719--734; J. Surma: *W duchu Tarskiego: o alternatywach teoriodowodowej metalogiki.* „Filozofia Nauki”, 1 (1993), s. 49-65; L. W. Szczerba: *Tarski and geometry.* "The Journal of Symbolic Logic", 51 (1986), s. 907-912; J. Tarski: *Uwagi o artykule Woleńskiego „Alfred Tarski jako filozof ”.* „Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Seria II: Wiadomości Matematyczne”, 12 (1994), s. 225-269; E. Tugendhat: *Tarskis semantische Definition der Wahrheit und ihre Stellung innerhalb der Geschichte des Wahrheit im logischen Positivismus.* 'Philosophische Rundschau", 8 (1960), s. 131-159; R. L. Vaught: *Alfred Tarski’s work in model theory.* "The Journal of Symbolic Logic", 51 (1986), s. 869-882; A. Visser: *Semantics and the liar paradox.* W: *Handbook of Philosophical Logic,* t. IV (Red. D. Gabbay, F. Guenthner), D. Reidel, Dordrecht 1989, s. 617-706; J. Woleński: *Brentano’s criticism of the correspondence conception of truth and Tarski’s semantic theory.* 'Topoi" 8 (1989), s. 105-110; J. Woleński: *Tarski as a philosopher.* W: F. Coniglione, R. Poli i J. Woleński (red.): *Polish Scientific Philosophy: The Lvov-Warsaw school.* „Poznań Studies in the Philosophy of the Sciences and the Humanities”, 28 (1993), s. 319-33 8; R. Wójcicki: *Pojęcie prawdy w językach nauk dedukcyjnych.* W: B. Skarga (red.): *Przewodnik po literaturze filozoficznej XX wieku,* t. 1. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1994, s. 427-437; R. Wójcicki: *The postwar panorama of logic in Poland.* W: M. L. Dalla Chiara et al. (red.): *Logic and Scientific Methods.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 1997, s. 497-508; J. Zygmunt: *The logical investigations of Jan Kalicki.* "History and Philosophy of Logic", 2 (1981), s. 41-53. J. Zygmunt: *Mojżesz Presburger: life and work.* 'History and Philosophy of Logic", 12 (1991), s. 211-223; J. Zygmunt: *Polish logic:* W:

The Routledge Encyclopedia of Philosophy. Vol. 7. Routledge, London 1998, s. 492-500.

B. Książki. J. Barwise, J. Etchemendy: *An Essay on Truth and Circularity.* Oxford University Press, New York 1987, X + 185 s.; E. W. Beth: *The Foundations of Mathematics. A Study in the Philosophy of Sciences.* North-Holland, Amsterdam 1959, XXVI + 741 s.; B. F. Caviness, J. R. Johnson (red.): *Quantifier Elimination and Cylindrical Algebraic Decomposition.* Springer--Verlag, Wien, New York, 1998, XIX + 431 s.; J. Etchemendy: *The Concept of Logical Consequence.* Harvard University Press, Cambridge, Mass. 1990, 174 s.; L. Henkin i inni (red.): *Proceedings of Tarski Symposium.* "Proceedings of Symposia in Pure Mathematics", vol. XXV, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island 1974, XXI + 498 s.; R. L. Martin (red.): *The Paradox of the Liar.* Yale University Press, New Haven 1970 (antologia ta zawiera prace m. in. R. A. Andersona, F. B. Fitcha, G. H. Herzbergera, J. T. Keamsa, R. L. Martina, B. Skrmsa i B. C. van Fraasena, oraz bibliografię); L. R. Martin (red.): *Recent Essays on Truth and the Liar Paradox.* Clarendon Press, Oxford, and Oxford University Press, New York 1984, VII + 309 s (zawiera prace następujących autorów: T. Burge, A. Church, S. Feferman, A. Gupta, H. J. Herzberger, S. Kripke, R. L. Martin, C. Parsons, B. Skyrms, P. W. Woodniff).; V. McGee: *Truth, Vagueness, and Paradox. An Essay on the Logic of Truth.* Hacket, Indianapolis, Indiana 1991, X + 236 s.; D. Monk: *Mathematical Logic.* Springer-Verlag, Berlin 1976, X + 531 s.; G. H. Moore: *Zermelo's Axiom of Choice: Its Origins, Development and Influence.* Springer-Verlag, New York 1982; A. Mostowski: *Logika matematyczna.* Warszawa -Wroclaw 1948, VIII + 388 s.; A. Mostowski: *Thirty Years of Foundational Studies.* "Acta Fennica Philosophica", t. 17(1965), 176 s.; W. A. Pogorzelski: *Notions and Theorems of Elementary Formal Logic.* Warsaw University - Bialystok Branch, Bialystok 1994, 525 s.; W. A. Pogorzelski, J. Słupecki: *O dowodzie matematycznym.* PZWS, Warszawa 1970, 128 s.; W. A. Pogorzelski, P. Wojtylak: *Elements of the Theory of Completeness in Propositional Logic.* Uniwersytet Śląski, Katowice 1982, 144 s.; W. Stegmüller: *Das Wahrheitsproblem und die Idee der Semantik. Eine Einführung in die Teorien von A. Tarski und R. Carnap.* Springer-Verlag, Wien 1957; B. Twardowski, J. Woleński (red.): *Sixty Years of Tarski's Definition of Truth. Proceedings of the Conference held in Kraków, April 9-10, 1993.* Philed, Kraków 1994, 112 s.; J. Woleński: *Filozoficzna szkoła lwowsko-warszawska.* PWN, Warszawa 1985, 348 s.; J. Woleński, E. Köhler (red.): *Alfred Tarski and the Vienna Circle. Austro-Polish Connections in Logical Empiricism.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 1999, X + 346 s.; R. Wójcicki: *Theory of Sentential Calculi. An Introduction.* Reidel, Dordrecht 1987.

III. INFORMACJE BIOGRAFICZNE. Alfred Tarski urodził się 14 stycznia 1901 r. w Warszawie w rodzinie Ignacego i Róży Tajtelbaumów. Świadectwo dojrzałości uzyskał w 1918 r. w Ośmioklasowej Szkole Ziemi Mazowieckiej. W okresie 15. 10. 1918 - 22. 03. 1924 studiował na Wydziale Filozoficznym Uniwersytetu Warszawskiego. Zamierzał „poświęcić się pracy naukowej na polu biologii". Po kilku miesiącach biologię porzucił dla matematyki. Uniwersyteckimi nauczycielami Tarskiego byli: Czesław Białobrzeski, Zygmunt Janiszewski, Jan Łukasiewicz, Tadeusz Kotarbiński, Kazimierz Kuratowski, Stanisław Leśniewski, Leon Petrażycki, Stefan Pieńkowski i Wacław Sierpiński. Pierwszą pracę naukową ogłosił jako student II roku; nosiła ona tytuł *Przyczynek do aksjomatyki zbioru dobrze uporządkowanego. Z seminarium profesora Stanisława Leśniewskiego w Uniwersytecie Warszawskim* (por. **[21]).** Studia ukończył doktoratem na podstawie pracy *O wyrazie pierwotnym logistyki,* której promotorem był Stanisław Leśniewski. (Na tzw. Karcie Archiwalnej, wypełnianej przez uniwersytecką administrację w momencie ukończenia przez słuchacza studiów, czytamy, że Alfred Tarski „przestudiował całkowity kurs wydziału filozoficznego sekcji matematycznej, napisał rozprawę doktorską i w dniu 22 marca 1924 r. został promowany na doktora filozofii ze stopniem *Doctoris philosophiae").*

W karierze twórczej i zawodowej Tarskiego, trwającej ponad sześćdziesiąt lat, wyróżnić można trzy okresy: warszawski (do sierpnia 1939 r.), wschodnioamerykański (sierpień 1939-czerwiec 1942) oraz kalifornijski w Berkeley (1942-1983). Omówimy teraz pokrótce te okresy.

Po doktoracie Tarski podjął jeszcze studia matematyczno-fizyczne w zakresie astronomii, fizyki doświadczalnej i teorii względności, których po niecałym roku zaniechał, oddając się bez reszty pracy twórczej. W roku 1925 uzyskał tytuł docenta filozofii i matematyki Uniwersytetu Warszawskiego. Od 1 X 1929 r. był starszym asystentem Seminarium Filozoficznego Jana Łukasiewicza, a od 1 X 1934 adiunktem. Nie udało mu się uzyskać profesury ani w Warszawie, ani nigdzie indziej. Jesienią 1928 roku rozpoczął starania o objęcie katedry logiki matematycznej na Uniwersytecie Jana Kazimierza, której jednak nie dostał. [Konkurs w tej sprawie został rozstrzygnięty w roku 1930 na rzecz Leona Chwistka]. Na Uniwersytecie Warszawskim prowadził zajęcia zlecone. Uczył też matematyki w liceum im. Stefana Żeromskiego i logiki w Instytucie Pedagogicznym[1]. W okresie warszawskim Tarski prowadził nadzwyczj intensywne i wielotematyczne badania w zakresie logiki matematycznej, semantyki, teorii mnogości, teorii miary, podstaw geometrii, dydaktyki logiki i geometrii. Cała jego późniejsza twór-

[1] Dane bibliograficzne pochodzą z dokumentów znajdujących się w Archiwum UW oraz książki *Czy wiesz, kto to jest?* pod red. Stanisława Łozy. Wydawnictwo Głównej Księgarnii Wojskowej, Warszawa 1938.

czość jest zakorzeniona w tym właśnie okresie. Opublikował wtedy 3 książki, 62 artykuły i 16 abstraktów. Już około roku 1930 Tarski stał się czołową postacią warszawskiej szkoły logicznej i matematycznej. Godny podkreślenia jest fakt jego kooperacji z niemal wszystkimi wybitnymi przedstawicielami tej szkoły: Tarski publikował wspólnie ze Stefanem Banachem i Adolfem Lindenbaumem, ze swoimi nauczycielami: Janem Łukasiewiczem, Kazimierzem Kuratowskim i Wacławem Sierpińskim, oraz ze swoim uczniem Andrzejem Mostowskim. Uczestniczył aktywnie w rodzimym i międzynarodowym życiu naukowym. Był częstym prelegentem na posiedzeniach Towarzystwa Filozoficznego i Towarzystwa Matematycznego, brał udział w Polskich Zjazdach Filozoficznych (1927, 1936), Kongresie Matematyków Słowiańskich (Warszawa 1929) i III Kongresie Matematyki Polskiej (Warszawa 1937). Uczestniczył w międzynarodowych konferencjach filozoficznych w Pradze (1934), Paryżu (1935) i Amersfoort (1938). W lutym 1930 roku na zaproszenie Hansa Hahna wyjechał po raz pierwszy do Wiednia; na seminarium Hahna przedstawił dwa odczyty: o arytmetyce liczb kardynalnych oraz o aksjomacie wyboru i uogólnionej hipotezie *continuum*, u Schlicka zaś mówił o rachunku zdań i jego metateorii. Wizytę tę można uważać za początek ściślejszych kontaktów między szkołą warszawską i wiedeńską, w wyniku których Koło Wiedeńskie będzie pod rosnącym wpływem logiki polskiej. Ponowną podróż do Wiednia odbył Tarski w roku 1935 na zaproszenie Karla Mengera; na prowadzonym przez niego *mathematisches Kolloquium* wykładał o rozszerzeniach niezupełnych systemów rachunków zdaniowych oraz o ograniczoności środków wyrazu teorii dedukcyjnych (por. odpowiednio **[36b]** i **[36c]).** Spotkał się wtedy ponownie z Carnapem i Popperem.

Na Kongresie Filozofii Naukowej (Paryż 1935 r.) przedstawił dwa odczyty: O *ugruntowaniu naukowej semantyki* (por. **[36])** i *O pojęciu wynikania logicznego* (por. **[36a]),** wzbudzając zainteresowanie i polemikę wokół problemów semantycznych. [Artykuł **[36a]** po dziś dzień stanowi źródło inspiracji, interpretacji i rozmaitych krytyk *(cf.* wymienione wyżej prace Etchemendy'ego, McGee, Goméz-Torrente i Sagüillo.]

Okres wschodnioamerykański rozpoczął się dokładnie 21 sierpnia 1939 roku w porcie w Nowym Jorku; w tym właśnie dniu Tarski przybył do USA, by wziąć udział w Konferencji Jedności Nauki (Harward University, Cambridge, Mass., wrzesień 1939) oraz aby odbyć tournee odczytowe po kilku uniwersytetach. Wizytę, zaplanowaną na około 2 miesiące, zaaranżował Quine[2]. Wybuch drugiej wojny światowej i dalszy jej przebieg spowodował,

[2] Znajomość Tarskiego i Quine'a datuje się od roku 1933, kiedy Quine za namową Camapa przyjechał do Warszawy, by uczyć się najnowszej logiki. Quine uczestniczył przez 6 tygodni w seminariach prowadzonych przez Łukasiewicza i Tars kiego. [Ten epizod jest ważny dla historii logiki i powinien być skrupulatnie zbadany.]

że Tarski na zawsze pozostał w Ameryce i nigdy do Polski na stałe nie powrócił. Do jesieni 1942 r. przebywał na wschodnim wybrzeżu, poszukując stałego miejsce (którego jednak nie znalazł). Dzięki pomocy M. Stone'a, Quine'a, E. Nagla i H. Curry'ego i innych otrzymał stałą wizę imigracyjną do USA oraz tymczasowe posady. Lata 1939-1941 spędził głównie na Harvardzie; wtedy nawiązał współpracę z logikiem i matematykiem J. C. C. McKinsey'em, z którym napisał trzy fundamentalne rozprawy o algebraicznych aspektach topologii i zastosowaniu metod topologicznych do logiki intuicjonistycznej i modalnej: **[44], [46]** i **[48]** (por. też **[48^{m}]).** W roku 1940 wiosną wykładał logikę na City University of New York, gdzie jego studentem był Keneth Arrow *(cf.* **[41^{m}],** s. XVI). W roku akademickim 1941/1942 przebywał w Princeton, w Institute for Advanced Study. Spotkał tam Paula Erdösa, z którym napisał artykuł z dziedziny teorii mnogości **[43],** oraz odnowił kontakty z Kurtem Gödlem, członkiem tego Instytutu od roku 1940. Z Erdösem współpracował jeszcze w latach późniejszych *(cf.* **[61b]).**

Jesienią 1942 r. Tarski został zatrudniony jako wykładowca w Department of Mathematics, University of California, Berkeley; w roku 1948 uzyskał tam profesurę zwyczajną, na której pozostał do emerytury. W latach 1944-1946 był Tarski prezydentem Association for Symbolic Logic. Dzięki rozmaitym zabiegom organizacyjnym, wspartych niekwestionowanym autorytetem naukowym, potrafił w przeciągu kilku lat stworzyć na uniwersytecie w Berkeley jeden z najważniejszych ośrodków w skali światowej w zakresie logiki, podstaw matematyki i metodologii nauk. Pozyskał do współpracy zarówno matematyków, jak i filozofów. W latach pięćdziesiątych i sześćdziesiątych kierował międzynarodowym programem badawczym poświęconym szeroko rozumianej logice matematycznej, obejmującym m. in. logiczne metody rozstrzygania, teorię modeli, logikę z wyrażeniami nieskończenie długimi, algebry cylindryczne, podstawy teorii mnogości, geometrii itd. Streszczenie wyników otrzymanych w tym programie oraz nazwiska uczonych biorących udział w badaniach znaleźć można w specjalnych raportach sygnowanych przez Tarskiego (patrz **[52^{pr}], [54^{pr}],.. [68^{pr}]).** Ustanowił też Tarski oryginalny program interdyscyplinarny w zakresie logiki i metodologii nauk dla doktorantów. W Berkeley zorganizował dwa sympozja: jedno na przełomie lat 1957/1958 poświęcone metodzie aksjomatycznej, ze szczególnym podkreśleniem jej zastosowań w geometrii i fizyce (a więc tematowi, który jest obecny w niemal całej twórczości Tarskiego i stanowi o jej specyfice; *cf.* **[59^{e}]),** drugie w roku 1963 na temat teorii modeli (czyli dziedziny, której Tarski był współtwórcą i ideowym przywódcą, *cf.* **[65^{e}].** W ramach International Union for the History of Philosophy of Science (był jej prezydentem w latach 1956-1957), powołał do życia organizację Division of Logic, Methodology, and the Philosophy of Science. Zadaniem DLMPS jest organizacja międzynarodowych kongresów, które, począwszy od pierwszego kongresu tego rodzaju na Uniwersytecie Stanford w roku 1960 *(cf.* **[62[e]])** pracują według oryginalnego schematu opracowanego przez Tarskiego. Tworząc DLMPS, Tarski urzeczywistnił pod pewnym względem i na większą skalę przedwojenną ideę jedności nauki. Był rzecznikiem swobody badań naukowych i ich prowadzenia w imię zaspokojenia estetycznych i intelektualnych potrzeb człowieka. Interesował się życiem kulturalnym i naukowym w powojennej Polsce. Wielu polskich logików, filozofów i matematyków skorzystało z jego gościnności i opieki naukowej w Berkeley. Do kraju przyjechał kilka razy, m. in. na sympozjum „Metody infinitystyczne" (Warszawa, wrzesień 1959) oraz na kolokwium metodologiczne o uzasadnianiu twierdzeń i decyzji (1961). Otrzymał 3 doktoraty *honoris causa:* na Uniwersytetach w Santiago de Chile, Paryżu i Helsinkach. Był członkiem British Academy i Holenderskiej Akademii Nauk. Nie powiodły się, niestety, starania o przyznanie Tarskiemu członkowstwa zagranicznego Polskiej Akademii Nauk.

Alred Tarski zmarł 27 października 1983 roku w Berkeley w Kalifornii.

IV. OSIĄGNIĘCIA. 1. Teoria Mnogości. Teoriomnogościowe badania Tarskiego z okresu przedwojennego należą do ogólnej teorii mnogości; dotyczyły aksjomatu wyboru i jego równoważników, arytmetyki liczb kardynalnych i porządkowych, wielkich liczb kardynalnych oraz teorii miary. Po wojnie większość z tych tematów nadal pozostanie w sferze zainteresowań Tarskiego, ale podejmowane one będą z bardziej wyrazistych pozycji metodologicznych, które Tarski sobie wypracował. Charakterystyczna będzie „interdyscyplinarność" badań teoriomnogościowych, bowiem będą one ściśle korespondować z rozważaniami z zakresu algebr Boole'a, logik infinitarnych, abstrakcyjnej teorii miary, oraz przewijać się przez nie będą motywy algebraiczne - akcentowane przez samego Tarskiego (wspomnimy o tym jeszcze za chwilę). Pojawi się też w pewnym stopniu metamatematyka teorii mnogości (patrz np. w **[62]).** Zapowiedziane w **[64],** s. 226, studium metamatematyczne nie doszło do skutku; przypuszczać należy, iż stało się tak dlatego, że w owym momencie pojawiła się całkiem nowa idea - pojęcie wymuszania *(forcing)* Paula Cohena, do której Tarski nie nawiązał; uczynili to jedynie jego uczniowie.

Filozoficznie doniosła jest praca **[24c],** w której pojęcie skończoności zbioru rozważa się niezależnie od pojęcia liczby naturalnej i bez odwoływania się do aksjomatu wyboru. Podejście Tarskiego jest tu charakterystyczne i pojawi się jeszcze w technicznych fragmentach monografii o prawdzie **[33[m]]** i pracach o algebrze Boole'a. Mianowicie, z dowolnym zbiorem w sposób naturalny skorelowana jest pewna struktura porządkowa: rodzina wszystkich podzbiorów danego zbioru i relacja inkluzji między tymi podzbiorami. Zbiór jest skończony w sensie Tarskiego, jeśli w każdej niepustej podrodzinie jego podzbiorów istnieje element maksymalny (ze względu na inkluzję). Skończoność została więc wyrażona w terminach porządkowych, bez pomocy liczb naturalnych czy pojęcia równoliczności zbiorów. Pod koniec lat trzydziestych badania zbiorów skończonych podjął uczeń Tarskiego, Andrzej Mostowski, który posłużył się tzw. metodą relatywizacji pochodzącą od Tarskiego i wypracowaną po części przez siebie metodą modeli permutacyjnych.

Obszerna praca [26], napisana wraz z Adolfem Lindenbaumem, jest podsumowaniem rezultatów osiągniętych przez każdego z autorów, jak i wyników wspólnych. „Wyniki te dotyczą różnych działów teorji mnogości: teorji równości mocy i liczb kardynalnych, teorji odwzorowań jednoznacznych, teorji uporządkowania i typów porządkowych, podstaw arytmetyki liczb porządkowych, wreszcie teorji mnogości punktowych. Wszystkie twierdzenia podane są bez dowodów; autorowie zamierzają uzasadnić i rozwinąć swe wyniki w przyszłych pracach o charakterze specjalnym" ([26], s. 299).

Tak się jednak nie stało. Twierdzenia Tarskiego i Lindenbauma zaczęły żyć własnym życiem, a ich uzasadnianiem zajmowali się zazwyczaj inni. Wiele uwagi poświęcił im Wacław Sierpiński. W jego *Zarysie teorji mnogości* (wyd. III, 1928, s. IV) czytamy:

„Między różnemi nowemi wynikami uwzględniłem też wiele wyników p. A. T a r s k i e g o: wśród nich są i takie jego wyniki, które dotąd nie były publikowane, oraz takie, które były ogłaszane bez dowodów, zakomunikowanych mi uprzejmie przez autora... ". W roku 1947 Sierpiński opublikował 5 artykułów ("Fundamenta Mathematicae", t. 34), które poświęcił dowodom różnych twierdzeń sformułowanych w [26]; m. in. uzasadnił słynne tw. 94, które głosi, że uogólniona hipoteza *continuum* implikuje aksjomat wyboru.

Z punktu widzenia przyszłego rozwoju teorii mnogości ważne były wyniki Tarskiego dotyczące mnożenia i potęgowania alefów *(cf.* **[26]**, pkt. C).

Charakterystyczne dla całej twórczości Tarskiego motywy algebraiczne są dobrze widoczne także w jego pracach teoriomnogościowych. Tarski dąży do algebraizacji teorii mnogości, i w tych usiłowaniach widać dwa zasadnicze nurty. Pierwszy dotyczy istnienia i mocy różnych obiektów wchodzących w skład ciał zbiorów (które, jak wiadomo, są szczególnymi przypadkami algebry Boole'a) i jest nierozerwalnie związany z bardziej zaawansowanymi badaniami z zakresu algebr Boole'a. Drugi nurt wyłania się z „teorji odwzorowali jednoznacznych" (patrz [26], s. 299 oraz s. 190-196) i zdąża do ogólnego ujęcia algebraicznych własności działań na liczbach kardynalnych i porządkowych (por. np. [49], [54]) oraz wyabstrahowania z nich całkiem ogólnych stuktur zwanych algebrami kardynalnymi i algebrami porządkowymi *(cf.* **[49m]**, **[56ma]**).

W pierwszym nurcie badań mamy szereg prac: [30], [30f], [37], [38b], **[38g], [39], [43], [62] i [64]**. Spośród szczegółowych osiągnięć Tarskiego wymieńmy kilka: W [30] Tarski udowodnił, że istnienie dwuwartościowej miary na danym zbiorze jest równoważne istnieniu ideału pierwszego w zbiorze potęgowym rozważanego zbioru; a stąd wywiódł twierdzenie, które dziś nazywamy twierdzeniem o ideale pierwszym *(resp.* o ultrafiltrze). W **[30a]** wprowadzone zostało pojęcie liczby kardynalnej (mocno) nieosiągalnej. *[m* jest liczbą *mocno nieosiągalną,* jeśli *m* jest nieprzeliczalna, regularna i n^p < m dla wszystkich liczb *n, p < m.]* Obszerny wykład teorii liczb nieosiągalnych znajduje się w [38a]. Jedno z twierdzeń w [39] głosi: jeśli *E* jest zbiorem nieskończonym mocy *m,* to liczba niegłównych ideałów pierwszych zbudowanych z podzbiorów zbioru *E* wynosi 2 *do potęgi* 2 *do potęgi m* (a więc jest największa, jaką być może). Inne zaś, że każda liczba kardynalna mierzalna jest nieosiągalna. [Liczbę kardynalną *m* nazywamy *mierzalną,* jeśli w ciele wszystkich podzbiorów zbioru mocy *m* istnieje ideał pierwszy, niegłówny i n-addytywny w każdej mocy *n < m.]*

Cel obszernej rozprawy **[30f]** Tarski ujął następująco:

"étant donné un ensemble infini A, combien y a-t-il de classes de sous-ensembles de A pourvues d'une propriété donné P? Les propriétés *P*, envisagées ici, ne sont d'ailleurs ni arbitraires, ni trop générales [...]".

Dodajmy, że to ogólne określenie można odnieść do innych, późniejszych prac. W **[30f]** Tarski w istocie koncentruje się na oszacowaniu liczby wszystkich ciał podzbiorów ustalonego zbioru i liczby ideałów pierwszych w ciele wszystkich podzbiorów danego zbioru. We wspólnej z Erdösem pracy [43] rozważany jest problem tego samego typu: czy w każdym ciele zbiorów istnieje rodzina zbiorów parami rozłącznych, której moc jest maksymalna? Rozwiązanie jest na ogół pozytywne, ale zależy istotnie od pojęcia liczby kardynalnej nieosiągalnej. Ten fakt stał się dla autorów pretekstem do sformułowania w ostatniem fragmencie artykułu [43] kilku ogólnych idei i problemów otwartych. Stymulowały one przyszłe badania samych autorów *(cf.* **[61b]**), jak również uczniów Tarskiego, Williama Hanfa i Jerome Keislera. Rozważano ogólne pytanie: czy liczby mocno nieosiągalne są silnie zwarte, mierzalne i słabo zwarte? Okazało się, że pytanie to ma ścisły związek z nowo powstałą dziedziną, jaką jest logika języków nieskończonych (w których formuły są nieskończenie długie); związek ten ujawnił sam Tarski [62] oraz Hanf (w pracy doktorskiej pod kierunkiem Tarskiego). W szczególności Tarski pokazał, że wiele liczb nieosiągalnych to liczby słabo niezwarte, a więc i niemierzalne. Ostatnia wielka praca Tarskiego z dziedziny teorii mnogości, napisana wspólnie z Keislerem, dotyczy liczb nieosiągalnych [64]; autorzy stosowali w niej nową na owe czasy konstrukcję (pochodzącą od J. Łosia), zwaną ultraproduktem. [Rozdział 10 pt. *Liczby kardynalne nieosiągalne* monografii K. Kuratowskiego i A. Mostowskiego: *Teoria mnogości*, wyd. III, PWN 1978, w dużej mierze opiera się na wynikach i metodach Tarskiego oraz jego współpracowników. Autorzy ci nazywają „kombinatorycznym" podejście do liczb nieosiągalnych, które zostało wypracowane w **[61b]** i **[64]].**

2. Algebra i logika: Algebry Boole'a; algebry relacyjne; algebry Boole'a z operatorami; algebry Brouwerowskie i algebry domknięci; algebry cylindryczne. Algebra Boole'a dla samego jej twórcy i jego kontynuatorów w XIX wieku była tylko algebraicznym wariantem rachunku zdań. Dopiero w latach trzydziestych naszego stulecia dzięki pracom E. V. Huntingtona, B. A. Bernsteina, M. H. Stone'a i Tarskiego stała się samodzielną dyscypliną czystej matematyki. Wtedy to bowiem klasę algebr Boole'a określono jako klasę modeli stosownego układu aksjomatów, podjęto *metalogiczne* badania dotyczące różnych układów aksjomatów dla tej teorii (Huntington, Tarski) i *matematyczne* badania algebr Boole'a jako systemów algebraicznych (Stone, Tarski), oraz ukazany został stosunek, w jakim logika zdań pozostaje do algebry Boole'a (Tarski); związek ten został następnie rozciągnięty na logikę kwantyfikatorów oraz logiki nieklasyczne (Tarski i jego współpracownicy: McKinnsey, Henkin, Jónsson, Horn, Monk i inni).

Jak wspomnieliśmy wyżej, w [30] znajdujemy wynik, który głosi, że w algebrze Boole'a wszystkich podzbiorów danego zbioru nieskończonego istnieje niegłówny i maksymalny ideał. Wiadomo, że uogólnienie tego rezultatu na dowolne algebry Boole'a stanowi kluczowy moment w teorii reprezentacji tych algebr (Stone 1936). **W** artykule **[35]** Tarski podał kilka równoważnych sformułowań pojęcia algebry Boole'a (używając jednego pojęcia pierwotnego: inkluzji), zdefiniował pojęcie zupełnej algebry Boole'a i pojęcie atomowej algebry Boole'a oraz udowodnił twierdzenie o reprezentacji dla zupełnych i atomowych algebr Boole'a (będące szczególnym przypadkiem twierdzenia Stone'a). W artykule o rachunku systemów: **[35a],** s. 520, Tarski wprowadził słynną konstrukcję, która później w literaturze logicznej zyskała miano *algebry Lindenbauma* bądź *algebry Lindenbauma--Tarskiego* (por. np. Surma 1982).

W latach 1937-1940 Tarski rozważał możliwość poszerzenia paradygmatu Boole'owskiego, polegającą na zastąpieniu algebr Boole'a strukturami bogatszymi, w których, oprócz zwykłych działań (odpowiedników spójników zdaniowych), będą również operacje korespondujące z pozostałymi pojęciami logicznymi (kwantyfikatorami, identycznością) lub zwykłymi działaniami na relacjach (suma mnogościowa, iloczyn względny itp). W tych badaniach Tarski świadomie nawiązał do bogatego kierunku algebraicznego dziewiętnastowiecznej logiki (De Morgan, Peirce, Schröder), widząc tam źródło idei i problemów otwartych.

W roku 1940, na wspólnym zjeździe Association for Symbolic Logic, American Philosophical Association i American Association for the Advancement of Science, Tarski wygłosił odczyt plenarny pt. *O rachunku relacji* (opublikowany jako **[41]),** który stał się ważnym wystąpieniem programowym, mającym dalekosiężne konsekwencje dla dalszego rozwoju badań algebraicznych, logicznych i metamatematycznych. Poświęcimy mu więc nieco więcej uwagi.

W **[41]** Tarski przedstawił swoje poglądy co do historii rachunku relacji, podkreślił ważność tego rachunku oraz, co najważniejsze, na tle pewnej metodologii postawił kilka kwestii do zbadania. Stwierdził, że to nie De Morgan, lecz Peirce położył podwaliny pod teorię relacji jako dyscyplinę dedukcyjną, a książka Schrödera *Algebra und Logik der Relative* -, jak dotąd jedyne obszerne ujęcie rachunku relacji - zawiera bogactwo nierozwiązanych problemów i wskazuje kierunek przyszłych badań”. Natomiast *„Principia Mathematica* tylko w nieznacznym stopniu przyczyniły się do rozwoju teorii relacji jako samodzielnej dyscypliny dedukcyjnej. Trzeba stwierdzić [...], że teoria ta, zwłaszcza rachunek relacji, znajduje się praktycznie na tym samym etapie rozwoju, na jakim była czterdzieści pięć lat temu” *(cf.* **[41],** s. 73-74). Następnie Tarski nakreślił dwa sposoby konstruowania rachunku relacji (dwuczłonowych).

Pierwszy polega na sformułowaniu teorii ogólniejszej, zwanej *elementarną teorią relacji,* i wyodrębnieniu stosownego jej fragmentu, który uznamy za rachunek relacji. Otóż elementarną teorię relacji nadbudowujemy nad węższym rachunkiem funkcyjnym Hilberta i Ackermanna, w którym występują dwa rodzaje zmiennych, zmienne indywiduowe i zmienne relacyjne, oraz kwantyfikatory wiążące tylko zmienne indywiduowe. Ponadto w języku mamy (1) stałe specyficzne *absolutne* (czyli Boole’owskie) na oznaczenie: relacji pełnej, relacji pustej, uzupełnienia relacji, sumy relacji i iloczynu relacji, (2) stałe specyficzne *relatywne* (czyli Peirce’owskie) na oznaczenie identyczności (między indywiduami), różności, konwersu, sumy względnej i iloczynu względnego relacji oraz (3) znak identyczności, który wyraża identyczność relacji. Elementarną teorię relacji w tym języku otrzymujemy przez przyjęcie stosownego układu aksjomatów (Tarski formułuje 12 specyficznych aksjomatów; *w każdym* z nich występują kwantyfikatory i zmienne indywiduowe). Zbiór wszystkich twierdzeń tej teorii, które nie zawierają żadnej zmiennej indywiduowej ani żadnego kwantyfikatora, uważamy właśnie za rachunek relacji zbudowany pierwszym sposobem.

Stosując drugą metodę, konstruujemy rachunek relacji w prostszym języku, który powstaje z powyżego języka przez usunięcie zmiennych indywiduowych i kwantyfikatorów; w tym prostszym języku mamy więc jeden rodzaj zmiennych. Przymujemy aksjomaty, które ze względów językowych muszą być jednak inne niż poprzednio. W naturalny sposób dzielą się one na trzy grupy: w pierwszej charakteryzujemy pojęcia logiczne (w tym wypadku są to tylko spójniki rachunku zdań), aksjomaty drugiej grupy charakteryzują pojęcia absolutne i relację identyczności między relacjami (pod względem formalnym są to więc aksjomaty algebry Boole'a), w trzeciej grupie mamy aksjomaty specyficzne dla pojęć relatywnych. Z tych aksjomatów wyprowadzamy twierdzenia, posiłkując się tylko regułą odrywania i regułą podstawiania.

Rachunek relacji w ujęciu drugim jest *ex definitione* teorią aksjomatyczną, a nie podzbiorem twierdzeń innej teorii aksjomatycznej, z czym mamy do czynienia w wypadku pierwszej metody. W związku z tym stawia Tarski pytanie *o pełność* drugiej formalizacji (względem pierwszej): czy każde twierdzenie rachunku relacji w sensie metody pierwszej jest twierdzeniem rachunku relacji w sensie metody drugiej lub równoważnie - z uwagi na twierdzenie Gödla o pełności dla węższego rachunku funkcyjnego - czy każde zdanie rachunku relacji, które jest prawdziwe w każdym modelu elementarnej teorii relacji, jest twierdzeniem rachunku relacji określonego drugim sposobem?

Następnie Tarski sformułował problem *reprezentacji,* czyli pytanie następujące: czy każdy model układu aksjomatów rachunku relacji w sensie drugim (czyli *algebra relacyjna)* jest izomorficzny z konkretną algebrą relacji, tj. klasą relacji dwuczłonowych na pewnym ustalonym zbiorze, która zawiera relację pełną, pustą i identycznościową oraz jest zamknięta na operacje Boole'owskie i Peirce'owskie (iloczyn względny i konwers)?

Tak zwane arytmetyczne własności algebr relacyjnych (tzn. własności działań, relacji między elementami itp., które nie zależą od pojęć mnogościowych) badała Louise H. Chin (patrz **[51]**; doktorat u Tarskiego w 1948). Nad problemem reprezentacji i pełności algebr relacyjnych pod koniec lat czterdziestych pracowali Tarski, jego uczeń Bjarni Jónsson oraz Roger Lyndon. Próby znalezienia rozwiązania doprowadziły Tarskiego i Jónssona do określenia nowej klasy algebr, zwanych *algebrami Boole'a z operatorami,* i stworzenia teorii tych algebr **([51a]** i **[52];** klasa algebr Boole'a z operatorami obejmuje topologiczne algebry Boole'a, algebry projektywne Everetta-Ulama oraz algebry relacyjne). W r. 1950 Lyndon udzielił negatywnej odpowiedzi na obydwa pytania Tarskiego. W tej sytuacji problem reprezentacji algebr relacyjnych można było rozważać tylko „lokalnie"; dokonali tego w szczegółach Jónsson i Tarski w **[52].**

Algebry domknięć (zwane dziś także topologicznymi agebrami Boole'a) stanowią szczególny przypadek algebr Boole'a z operatorami: mają jeden dodatkowy operator (działanie) unarny, który spełnia aksjomaty Kuratowskiego dla operacji topologicznego domknięcia. Tarski i McKinsey poświęcili tym algebrom dwa obszerne studia: **[44]** i **[46].** W tym drugim określili ponadto klasę algebr Brouwerowskich (typowym przykładem takiej algebry jest algebra zbudowana z wszystkich elementów domkniętych dowolnej algebry domknięć) i pokazali głębokie związki między obydwoma klasami algebr. Pojęcie *algebry funkcyjnie wolnej* było jednym z podstawowych narzędzi w tych badaniach (por. też **[46a]).** Algebry domknięć i algebry Brouwerowskie po stronie logicznej korespondują z modalnym rachunkiem S4 Lewisa i intuicjonistycznym rachunkiem zdań. Fakt ten został zbadany w **[48].** Dodajmy, że zawarte w **[5la]** twierdzenia o reprezentacji algebr domknięć mają pierwszorzędne znaczenie w semantyce typu Kripkego dla logiki modalnej i logiki dynamicznej. Ale ten fakt przez logików został zauważony dość późno: już po pracach Stiga Kangera i Saula Kripkego.

Wróćmy jeszcze do algebr relacyjnych. Lyndon (1950, 1956) odpowiedział negatywnie na pytania Tarskiego zawarte w **[41]:** istnieją niereprezentowalne algebry relacyjne oraz istnieją prawdziwe równości rachunku relacji, które nie są wyprowadzalne z aksjomatów Tarskiego. Praca Lyndona z 1950 r. zawierała ponadto twierdzenie *(błędne,* jak się później okazało), że klasa reprezentowalnych algebr relacyjnych nie jest aksjomatyzowalna przez żaden zbiór identyczności (czyli nie jest rozmaitością). Stąd naturalne było pytanie o zwykłą aksjomatyzowalność algebr relacyjnych. Tarski, uwzględniając stwierdzenie Lyndona, ogłosił w **[52ab],** że nie istnieje zbiór zdań w języku I rzędu, który aksjomatyzowałby klasę reprezentowalnych algebr relacyjnych; wniosek ten, jak się okazało, pozostawał w sprzeczności z faktami ustalonymi przez Tarskiego i Jónssona w **[52]** (twierdzenia 4.29, 4.31) oraz z następującym teoriomodelowym twierdzeniem Tarskiego: klasa wszystkich podalgebr algebr należących do ustalonej aksjomatyzowalnej klasy algebr sama jest aksjomatyzowalna, i to formułami otwartymi (por. Tarski **[54b],** Tw. 1. 6, 1. 13). Z tego ostatniego twierdzenia Tarski wyprowadza wniosek, że klasa relacyjnych algebr reprezentowalnych jest rozmaitością (patrz [55], tw. 2. 4).

W [41] Tarski zaanonsował jeden z najgłębszych wyników dotyczących algebr relacyjnych: równościowe teorie algebr relacyjnych oraz reprezentowalnych algebr relacyjnych są teoriami nierozstrzygalnymi. Dowód Tarskiego (naszkicowany w abstrakcie **[53ab])** polegał w istocie na zinterpretowaniu teorii mnogości w rachunku relacji. [Inny dowód podał Roger Maddux w dysertacji doktorskiej pod kierunkiem Tarskiego z roku 1978.] Ten fakt doprowadził Tarskiego do głębokiej filozoficznie idei zbudowania formalizmu podstaw matematyki, w którym nie występują zmienne indywiduowe, a jedynie równości (patrz **[53ᵃc]).** Nad tą ideą Tarski pracował przez ostatnie dziesięć lat swego życia wspólnie z S. Givantem, z którym ogłosił dzieło *A Formalization of Set Theory without Variables:* **[87ᵐ].**

Algebry cylindryczne powstały w związku z algebraizacją logiki kwantyfikatorów z identycznością. Zręby teorii tych algebr ustalił Tarski w latach 1948-1952 wspólnie z Louise Chin i Frederickiem Thompsonem (doktorat z tego zakresu u Tarskiego w r. 1951).

„Teoria algebr cylindrycznych (które można by też nazwać algebrami kwantyfikatorowymi) stawia sobie za cel określenie klasy struktur algebraicznych, które pozostają w tym samym stosunku do logiki predykatów (pierwszego rzędu), w jakim klasa algebr Boole'a pozostaje do logiki zdań" ([61a], s. 83).

Algebry cylindryczne są rozszerzeniami algebr Boole'a o pewną liczbę - zazwyczaj nieskończoną, zwaną wymiarem algebry - działań jednoargumentowych i pewną liczbę (zależną od wymiaru) wyróżnionych elementów (definicja jest zbyt techniczna, żeby ją tu przytaczać).

Naturalnymi przykładami algebr cylindrycznych są algebry Lindenbauma-Tarskiego, otrzymane z dzielenia algebry formuł I rzędu przez kongruencje wyznaczone przez teorie. Operacje cylindryfikacji w takich algebrach korespondują z kwantyfikatorami małymi, a elementy przekątniowe z formułami postaci $x = y$. Mają też algebry cylindryczne rodowód teoriomnogościowy, sięgający prac **[31]** i **[31a].**

Algebrom cylindrycznym Tarski i jego współpracownicy L. Henkin, D. Monk (doktorat u Tarskiego w 1961 r.), S. Comer, H. Andréka i T. Németi poświęcili wiele lat intensywnych badań, których podsumowaniem są dzieła: **[71ᵐ], [81ᵐ]** i **[85ᵐ]** oraz artykuł **[86a]** opublikowany po śmierci Tarskiego.

3. Rachunki logiczne. Tarski badał systemy z *Principia Mathematica* i prototetykę Leśniewskiego (w **[23], [23a]** i **[24]),** klasyczny rachunek zdań i jego fragmenty, systemy wielowartościowe **([30d]** i **[36c]),** intuicjonistyczny rachunek zdań **([38h]** i **[48]),** modalne rachunki Lewisa **[48],** klasyczny rachunek kwantyfikatorów z identycznością [65] oraz logikę równościową [68]. Tarski jest współtwórcą, razem z D. Scottem, rachunku zdań z formułami nieskończenie długimi (por. [58]) oraz twórcą logiki predykatów z formułami nieskończenie długimi **[58a])** i słabej logiki drugiego rzędu **[58"a].** Logiki infinitarne wywodzą się z badań Tarskiego nad działaniami nieskończonymi w algebrach Boole'a i algebrami cylindrycznymi. Natomiast słaba logika II rzędu powstała z inspiracji metamatematycznych, w szczególności teoriomodelowych. Negatywne rozwiązanie zagadnienia zwartości dla tej logiki zaowocowało pracą z teorii mnogości [62], której poświęciliśmy nieco uwagi w pkt. l. [Interesujący komentarz do **[58ᵃa]** znaleźć można w: Mostowski 1965, s. 136-137.]

Na początu XX w. logicy poszukiwali rozmaitych minimalnych układów pojęć pierwotnych, wystarczających do zbudowania systemów logicznych występujących w *Principia Mathematica* Whiteheada i Russella. Zagadnienie to miało widoczny związek z teorią definicji, bo „wystarczający" znaczyło, że wszystkie pozostałe pojęcia systemu są jakoś wyrażalne przez te pierwotne. W przypadku zwykłego rachunku zdań kwestia nie była zbyt trudna, co pokazali m. in. Sheffer i Nicod. Jeśli ograniczymy się do definicji wewnątrzjęzykowych (wewnątrzsystemowych) i równoważnościowych, to w systemie musi występować spójnik równoważności. Powstaje więc pytanie, czy on sam wystarczy do zdefiniowania pozostałych spójników. Otóż Tarski udowodnił w **[23],** że w systemie rachunku zdań, w którym oprócz zwykłych spójników występują zmienne funktorowe i kwantyfikatory wiążące zarówno zmienne zdaniowe, jak i zmienne funktorowe, stosowne definicje wszystkich spójników dadzą się napisać za pomocą równoważności i kwantyfikatorów. [System „logistyki" rozważany w [23] jest fragmentem teorii logicznej, którą Leśniewski opublikował w r. 1929 i nazwał prototetyką - patrz **[30d] (1),** s. 54, przypis 1]. Odkrycie Tarskiego przezwyciężało pewne słabości systemu *Principia* co do statusu definicji.

Inny istotny wkład Tarskiego do logiki Whiteheada i Russella polegał na uproszczeniu i precyzyjnym ujęciu prostej teorii typów **([33ᵐ], § 5,** oraz **[33];** patrz też Mostowski 1948, s. 213-217).

Wspólny z Janem Łukasiewiczem artykuł **[30d]** jest po dziś dzień wizytówką warszawskiej szkoły logicznej. Podsumowane w nim zostały dziesięcioletnie badania *zespołowe* zainicjowane przez Łukasiewicza, w których uczestniczyli też A. Lindenbaum, B. Sobociński i M. Wajsberg. Przedmiotem rozważań była metalogika najprostszej dyscypliny dedukcyjnej - rachunku zdań. Osiągnięto szereg głębokich technicznie i metodologicznie wyników. „Systematyzacji wszystkich tych wyników i sprecyzowania występujących w nich pojęć dokonał Tarski" *(cf.* wstęp do **[30d]).** Jerzy Słupecki napisał o **[30d],** że,, [n]iewiele jest prac logicznych, które wywarły tak duży wpływ na jej rozwój, i spotkały się z tak wysoką oceną". Wystarczy porównać kolejne wydania angielskie, aby się przekonać, jak duży to był wpływ (por. **[56ᵐ]** i **[56ᵐ] (1),** artykuł IV).

Spośród rozmaitych rezultatów technicznych Tarskiego dotyczących rachunku zdań wymieńmy, dla ilustracji, dwa. (A) Jeśli tezami aksjomatyzowalnego systemu rachunku zdań są dwie formuły: *CpCqp* oraz *CpCqCCpCqrr*, to system ten ma układ aksjomatów złożony z jednej formuły **([30d],** tzw. 8; dowód R. McKenzie'go w **[56ᵐ] (1),** s. 59). (B) Każdy zbiór formuł w języku czysto implikacyjnym, zawierający trzy formuły: *CpCqp*, *CpCCpqq* i

CCqrCCpqCCpr ma dokładnie jedno zupełne rozszerzenie. Całkiem niedawno okazało się, że te trzy formuły Tarskiego aksjomatyzują logikę BCK system odpowiadający rachunkowi kombinatorów (A. Wroński).

Osiągnięcie metodologiczne Tarskiego w zakresie rachunków zdaniowych polegało na uplasowaniu badań w wewnątrz ogólniejszego schematu pojęciowego, nazwanego metamatematyką (patrz [30c]) oraz określeniu i użyciu *metody macierzowej* (zwanej też matrycową; sam termin pochodzi od Tarskiego), będącej uogólnieniem zwykłej procedury zero-jedynkowej dla klasycznego rachunku zdań. W artykule **[38h]** Tarski pokazał, jak konstruować macierze logiczne ze zbiorów otwartych danej przestrzeni topologicznej i które z tych macierzy są adekwatne dla klasycznego i intuicjonistycznego rachunku zdań. W **[48]** pokazane zostały związki między systemem S4 Lewisa a intuicjonistycznem rachunkiem zdań; ujęto je za pomocą pewnej funkcji przekładu, zwanej obecnie w literaturze przekładem McKinsey'a-Tarskiego. Od strony algebraicznej praca ta nawiązuje do **[44]** i **[46]** i ujawnia topologiczny sens spójników intuicjonistycznych oraz operatorów modalnych konieczności i możliwości.

Przedmiotem badań w [65] była „uproszczona formalizacja rachunku predykatów z identycznością”. Tarski zaproponował dwie formalizacje, w których - opisując układ aksjomatów i reguł inferencji - nie ma potrzeby odwoływania się do pojęcia wolnego występowania zmiennej na danym miejscu ani do pojęcia podstawiania termów za zmienne indywiduowe. Wyniki [65] są poznawczo interesujące i mają praktyczne znaczenie (np. ułatwiają rozważania związane z arytmetyzacją składni, patrz R. Smullyan: *Gödel's Incompleteness Theorems*, Oxford 1991).

W roku 1942 Tarski znalazł konkretny skończony zbiór tautologii klasycznego rachunku zdań, który po domknięciu na reguły m*odus ponens* i podstawiania daje zbiór, który nie jest ogólnie rekurencyjny - krótko, Tarski odkrył nierozstrzygalny i skończenie aksjomatyzowalny system rachunku zdań. Kiedy pisał o tym do Quine'a, w charakterystycznym dla siebie stylu dodał: „Isn't [it] a nice thing ‘pour épater les logiciens-bourgeois’” (patrz **[87^{m}],** s. 168, przypis 3; oraz **[53^{a}d]).**

4. Metamatematyka. Jeszcze w latach dwudziestych Tarski postawił sobie za cel „sprecyzowanie znaczenia i ustalenie elementarnych własności kilku podstawowych pojęć z zakresu *metodologii nauk dedukcyjnych*, którą za Hilbertem nazywamy zwykle *metamatematyką”* **[30c],** s. 22). W latach trzydziestych Tarski w istocie zrealizował zamiar ambitniejszy, polegający na stworzeniu metamatematyki rozumianej szerzej i nieco inaczej niż metamatematyka Hilberta. Metamatematyka Tarskiego nie jest bowiem ani konstruktywna, ani finitystyczna, lecz teoriomnogościowa. Bierze ona swój początek w badaniach najprostszych systemów dedukcyjnych: rachunku zdań, algebry klas, geometrii elementarnej, arytmetyki liczb rzeczywistych itp. (patrz [33^{m}], przypis 53, s. 56), a inspiracje czerpie również z dzieł Skolema, Löwenheima, Russella, Whiteheada, Veblena i wielu innych.

Przez metamatematykę Tarskiego rozumiemy pewien zespół *teorii aksjomatycznych* wraz z twierdzeniami i aparatem pojęciowym w nich ugruntowanym. Są to teorie matematyczne w tym zwykłym sensie, że zawierają teorię mnogości lub jej fragment. Prace **[30c]**, **[33]**, **[30e]**, **[35a]** i **[36d]** stanowią korpus metamatematyki Tarskiego i opisują trzy teorie: ogólną teorię konsekwencji, teorię konsekwencji nadbudowaną nad klasycznym rachunkiem zdań oraz rachunek systemów.

A. Ogólna teoria konsekwencji jest teorią dwóch pojęć pierwotnych: zdania (zbioru zdań *S*) i operacji konsekwencji *Cn*; operacja ta działa na podzbiorach zbioru *S* i przyjmuje jako swoje wartości zbiory zdań. Pojęcia te scharakteryzowane są prostymi aksjomatami, które mówią, że konsekwencja jest funkcją rozszerzającą, idempotentną i zwartą (ma skończony charakter). W terminach konsekwencji Tarski definiuje pojęcie systemu dedukcyjnego (zbioru zdań zamkniętego na *Cn*) i pojęcia metalogiczne, jak aksjomatyzowalność, niesprzeczność, zupełność, niezależność i ustala własności i wzajemne związki między tymi pojęciami **[30e]**.

B. Teoria konsekwencji nad logiką klasyczną powstaje z ogólnej teorii konsekwencji przez dodanie kilku założeń. Zbiór zdań *S* ma teraz strukturę algebry abstrakcyjnej i określone są w nim dwa działania: implikacja i negacja, a dodatkowe aksjomaty wyrażają własności tych działań. Np. schemat twierdzenia o dedukcji: Jeśli $z \in Cn\ (X \cup \{y\})$, to $y \rightarrow z \in Cn\ (X)$, oraz wyrażenie następujące: $Cn\ (\{x, \neg\ x\}) = S$ są aksjomatami. Jeżeli w *S* nie ma innych spójników niż implikacja i negacja, to zbiór konsekwencji zbioru pustego pokrywa się ze zbiorem tez implikacyjno-negacyjnego rachunku zdań. Jeśli natomiast strukturę algebraiczną *S* bardziej wyspecyfikujemy, pozostawiając jednak aksjomaty bez zmian, to $<S, Cn>$ może ujmować klasyczną logikę predykatów lub inne systemy logiczne. Do pomyślenia jest równoczesna modyfikacja języka, np. jego wzbogacanie, oraz modyfikacja i wzbogacanie aksjomatów. Prace w tym kierunku prowadzili: W. A. Pogorzelski, J. Słupecki, A. Grzegorczyk i inni.

C. Rachunek systemów. W tym wypadku mamy inny zestaw pojęć pierwotnych: zbiór zdań *S* wraz z operacjami negacji i implikacji oraz wyróżniony podzbiór *L* zbioru *S*, który w zamierzonej interpretacji należy uważać za zbiór tez logicznych. Pojecia te scharakteryzowane są aksjomatycznie, a operacja konsekwencji jest zdefiniowana (patrz **[35a]** i **[36d]**).

Matematycznie rzecz biorąc, Tarski badał, dla ustalonego *S* i *Cn*, rodzinę *Cn*-systemów, tzn. zbiór $\{X \subseteq S\colon Cn\ (X) = X\}$ i rozmaite jego podzbiory[3]. Sformułował też ogólne zadanie, aby zbadać niesprzeczne i zupełne rozszerzenia ustalonych systemów (teorii), albowiem jest to dobry sposób poznania danej teorii i jej metateoretycznych własności. U Tarskiego znajdujemy wiele przykładów rozwiązania tego zadania; jedne dotyczą rachunków zdaniowych, inne łączą się zazwyczaj z badaniami nad rozstrzygalnością i stosowaniem metody eliminacji kwantyfikatorów (patrz np. [48^{m}], [67^{m}a], [78]).

Tarski wzbogacił metamatematykę o pojęcie omega-zupełności i zbadał je w kontekście omega-niesprzeczności Gödla (*cf.* [33]).

Filozoficznie interesujący komentarz do do metamatematyki ogólnej Tarskiego wygłosił Jerzy Łoś:

„Można powiedzieć, nie bez słuszności, że większość twierdzeń zawartych w tych pracach (może poza *Grundzüge...*) logicy ówcześni, jeśli nie znali, to przynajmniej uświadamiali je sobie. Zwrócę tu więc uwagę na jeden, moim zdaniem bardzo ważny, aspekt tych prac. Mamy w logice syntaksę i semantykę. Konsekwencja i wszystko co z niej wynika należy oczywiście do syntaksy, to było naczelną zasadą nowoczesnej logiki. Wyprowadzanie wniosków nie zależy od treści, a tylko od formy zdania, dopuszczalne są tylko dyrektywy strukturalne. Materialiści atakowali ten pogląd, ale ich awersja do formalizowania zdań polegała na niezrozumieniu, że forma zdań i wypowiedzi jest właśnie ich materialną cechą, że poruszając się w sferze kształtu wyrażeń odnosimy się właśnie do tego materialnego substraktu naszych myśli, który wymaga tylko najprostszych sensualnych czynności dla swej identyfikacji. A więc jakkolwiek by nie było, konsekwencja to syntaksa. Otóż Tarski w wymienionych pracach przeniósł jakby teorię konsekwencji o szczebel wyżej. Pokazał, że można nią operować w oderwaniu od konkretnego języka, że ma ona swoje autonomiczne prawa i własności. Można powiedzieć, że Tarski zalgebraizował ją zaś tak, że syntaktyczne własności zdań stały się nieistotne, abstrakcja jest bardzo daleko posunięta, w tej jednak postaci, jak to się często abstrakcjom zdarza, przedstawia sprawy niesłychanie prosto i zrozumiale. Inną rzeczą jest natomiast to, że tak nie można algebraizować, gdy się przejdzie od syntaksy do semantyki. Tę ostatnią trzeba oprzeć na szczegółowej syntaksie języka. To widać już po pierwszych rozdziałach wielkiej pracy Tarskiego *Pojęcie prawdy w językach nauk dedukcyjnych*" (Łoś 1986, s. 6-7).

[3] Wzbogacenie paradygmatu Tarskiego przez Łosia, Suszkę i Wójcickiego polegało m.in. na tym, żeby rozważać języki *S*, które mają strukturę algebry wolnej i badać nie tyle rodzinę wszystkich *Cn*-systemów (dla ustalonego *Cn*), co klasę wszystkich *Cn*-ów określonych na danym *S* i jej interesujące podklasy (por. pkt. IV).

Wspomnimy jeszcze o badaniach Tarskiego i jego współpracowników w zakresie rozstrzygalności i nierozstrzygalności (nie ma tutaj symetrii!). Można je zaliczyć do metamatematyki szczegółowej, i wyodrębnić w nich cztery nurty: (1) rozstrzygalne teorie elementarne, (2) nierozstrzygalne teorie elementarne, (3) nierozstrzgalne teorie inne niż elementarne, (4) problemy rozstrzygalności drugiego stopnia.

Do dziedziny (1) należy jedno z największych w ogóle odkryć logicznych -jest nim twierdzenie o rozstrzygalności elementarnej teorii liczb rzeczywistych (patrz **[48^m], [67^{m}a],** gdzie podane są wyczerpujące uwagi historyczne dotyczące tego odkrycia, jak i dane bibliograficzne o innych wynikach Tarskiego o rozstrzygalności).

W rozprawie Tarskiego *Ogólna metoda dowodów nierozstrzygalności* (tj. cz. I książki **[53^m])** po raz pierwszy w literaturze dogłębnie zostało przeanalizowane pojęcie nierozstrzygalności i istotnej nierozstrzygalności. Kolejne rozprawy tej książki poświęcone są zastosowaniom wyników Tarskiego do rozmaitych teorii liczb naturalnych i teorii grup.

Wspomniane wyżej w pkt. 2. twierdzenie, iż równościowa teoria reprezentowalnych algebr relacyjnych jest nierozstrzygalna, stanowi przykład wyniku typu (3). Inne rezultaty w tym zakresie znaleźć można w **[87^m]** i **[85^m].**

Zagadnienie rozstrzygalności drugiego rzędu Tarski sformułował w **[53^m],** s. 34: „Mamy na myśli zagadnienie istnienia metody, która pozwalałaby nam w każdym poszczególnym przypadku rozstrzygnąć, czy dana teoria jest rozstrzygalna, czy nie". Ogólniej, chodzi w tym wypadku o istnienie algorytmu, który rozstrzygałby o każdej teorii z danej klasy, czy ma ona daną własność, czy też jej nie ma. Zagadnienie rozstrzygalności drugiego stopnia jest przedmiotem żywego zainteresowania logików algebraicznych. Słynny jest następujący problem Tarskiego: czy istnieje metoda rozstrzygania, pozwalająca o każdej teorii równościowej stwierdzić, czy jest ona, czy też nie jest skończenie aksjomatyzowalna (za pomocą równości)?

5. Semantyka. Ten fragment twórczości Tarskiego jest dość dobrze znany w środowisku filozoficznym, więc ograniczymy się tu do kilku uwag ogólnych.

W pewnym momencie nowoczesna logika formalna odczuwała potrzebę operowania pojęciami semantycznymi - prawdy, spełniania, definiowalności w modelu itp. i widać było, że dalszy jej rozwój wymaga ich legitymizacji. Tarski fakt ten wyraźnie dostrzegł, i widział w nim szansę dla siebie i dla logiki. Klimat filozoficzny był niesprzyjający; z jednej strony miał filozofów (przede wszystkim wiedeńskich) sceptycznie nastawionych do pojęć semantycznych, z drugiej matematyków, którzy „na ogół nie lubią zajmować się pojęciem definiowalności; ich postawa wobec tego pojęcia jest nieufna i pełna rezerwy. Powody tej awersji są jasne i zrozumiałe. Przede wszystkim sam termin ‘definiowalny’ nie jest jednoznaczny... ” i panuje „pogląd, że pojęcie [definiowalności] leży w ogóle poza właściwymi granicami matematyki” (patrz **[31],** s. 210).

Tarski - filozoficzny uczeń Leśniewskiego i Kotarbińskego - pokazał, że dla pewnego typu języków (w owym czasie były to języki typu Peany i Whiteheada-Russella) pojęcie prawdy da się zdefiniować środkami teoriomnogościowymi. W tym celu trzeba, między innymi, umieć mówić w języku, w którym ma być sformułowana definicja, o składni badanego języku. Tarski ten krok wykonał, konstruując aksjomatyczną teorię, zwaną przez niego metanauką (patrz **[33^{m}],** par. 2). Po wyartykułowaniu filozoficznie doniosłej tzw. *umowy P* (ustalającej warunki merytorycznej trafności poszukiwanej definicji) samo sformułowanie definicji pojęcia „zdanie prawdziwe” sprowadzało się już do pewnego zadania teoriomnogościowego.

W latach pięćdziesiątych XX w. języki typu Peany (nie podlegające interpretacji) zostały całkowicie wyparte z rozważań metalogicznych na rzecz języków predykatów I rzędu. Schemat definiowania prawdy dla tych językow jest taki sam, ale ze względu na ich składnię i sposób użycia, określa on w istocie inne pojęcie: „zdanie języka *J* prawdziwe w modelu *M”;* teoria prawdy Tarskiego staje się wtedy wyspecjalizowaną gałęzią semantyki zwaną teorią modeli (patrz **[54a], [54b], [55]** i **[57a]).**

Po ogłoszeniu rozprawy **[44a],** adresowanej do szerszych kręgów filozoficznych i zawierającej też polemikę z rozmaitymi zarzutami, jakie zostały podniesione wobec semantycznej koncepcji prawdy, Tarski nie zabrał głosu w sprawach *stricte* filozoficznych dotyczących jego koncepcji prawdy.

Wszystkie prace Tarskiego poświęcone teorii prawdy i semantyce ogólnej zostały zebrane w tomie **[95^{m}].** Zamieszczona wyżej w pkt. II literatura obejmuje najważniejsze studia, jakie na temat semantyki Tarskiego zostały napisane.

V. UCZNIOWIE I NASTĘPCY (w Polsce). Mojżesz Presburger był pierwszym uczniem Tarskiego; w 1929 roku przedstawił pracę magisterską, w której metodą eliminacji kwantyfikatorów udowodnił zupełność i rozstrzygalność elementarnej teorii dodawania (bez mnożenia!) liczb całkowitych. Wynik ten łatwo przenosi się na teorię dodawania liczb naturalnych, zwaną dziś *arytmetyką Presburgera* (patrz Zygmunt 1991). Pierwszym doktorem wypromowanym przez Tarskiego był Andrzej Mostowski (rozprawa *O niezależności definicji skończoności w systemie logiki,* 1938). Po wojnie Tarski kierował 22 doktoratami, wśród których były dysertacje B. Jónssona, Wandy Szmielew, R. Vaughta, C. C. Changa, S. Fefermana, R. Montague, H. J. Keislera, J. D. Monka i innych (pełną listę doktorantów Tarskiego znaleźć można w artykule Hodges 1986; o niektórych wspomnieliśmy w pkt.

IV). Wszystkie one dotyczyły współczesnych zagadnień logiki matematycznej, teorii mnogości, algebry uniwersalnej, logicznych i metamatematycznych aspektów różnych systemów algebraicznych, jak algebry Boole'a, grupy Abelowe, algebry relacyjne, algebry cylindryczne, logika równościowa i podstawy geometrii. Żadna z prac nie rozważała wprost jakichś filozoficznych aspektów logiki czy podstaw matematyki. We wszystkich chodziło o rozwiązanie określonych problemów natury technicznej i tym samym rozwinięcie poszczególnych teorii. W Polsce recepcja dzieł Tarskiego dokonała się za sprawą Andrzeja Mostowskiego, Wandy Szmielew oraz logików i matematyków młodszego pokolenia, takich jak Andrzej Grzegorczyk, Jerzy Łoś, Andrzej Ehrenfeucht, Jan Mycielski, Helena Rasiowa, Czesław Ryll-Nardzewski, Roman Sikorski, Stanisław Surma, Lesław Szczerba, Witold A. Pogorzelski, R. Wójcicki. Bardziej zaawansowane rozdziały *Logiki matematycznej* (1948) Andrzeja Mostowskiego są w istocie wykładem idei i wyników logicznych Tarskiego. Omawiając zakres treści przedstawionych w tym podręczniku Mostowski konkluduje: „Oczywiście względy subiektywne też odegrały rolę w wyborze materiału. Czytelnik obeznany z literaturą logiczną stwierdzi z łatwością, jak dalece na wybór ten wpłynęły prace A. Tarskiego" (s. IV).

Wspólne prace Tarskiego i Mostowskiego **([39a], [53^{m}], [78])** dotyczyły algebraicznych aspeków metamatematyki, nierozstrzygalności w arytmetyce liczb naturalnych oraz eliminacji kwantyfikatorów i zupełności elementarnej teorii dobrego porządku. Praca doktorska Mostowskiego nawiązywała do wczesnych badań Tarskiego nad pojęciem skończoności w rozmaitych systemach teorii mnogości. Mostowski użył w niej tzw. metody relatywizacji kwantyfikatorów, pochodzącej od Tarskiego (Tarski użył tej metody do otrzymania wyników wymienionych w [34], przypis 20 i [36b], s. 22). Naturalną kontynuacją doktoratu była z kolei rozprawa habilitacyjna Mostowskiego o aksjomacie wyboru dla zbiorów skończonych. Idee semantyczne Tarskiego, zwłaszcza dotyczące definiowalności, Mostowski połączył z bardziej konstruktywnymi i teoriodowodowymi technikami Gödla w książce *Sentences Undecidable in Formalized Arithmetic. An Exposition of the Theory of Kurt Gödel* (1952).

Jerzy Łoś uogólnił i w szczegółach przedstawił metodę macierzy logicznych (1949), a w latach pięćdziesiątych prowadził pionierskie badania w teorii modeli (przy współpracy R. Suszki), które korespondowały z równoległymi badaniami Tarskiego i jego uczniów (C. C. Changa i R. Vaughta). Na początku lat pięćdziesiątych Jan Kalicki opublikował kilka prac o macierzach logicznych, a następnie, po przyjeździe do Berkeley, badał logikę równościową, pracując w paradygmacie teoriomodelowym Tarskiego (patrz Zygmunt 1981).

Helena Rasiowa i Roman Sikorski rozwinęli *stricte* algebraiczny kierunek badań Tarskiego (wspólnych z McKinsey'em, Hornem, Henkinem) i ogłosili wiele prac poświęconych algebraizacji logiki klasycznej i różnych logik nieklasycznych (por. H. Rasiowa, R. Sikorski: *The Mathematics of Metamathematics.* PWN 1970; H. Rasiowa: *An Algebraic Approach to Non-classical Logics.* PWN and North-Holland, 1974).

Witold Pogorzelski i Ryszard Wójcicki badali teorię konsekwencji i teorię systemów Tarskiego. W latach 70. R. Wójcicki zainicjował program badawczy, którego celem było stworzenie nowoczesnej metodologii rachunków logicznych. Centralnym pojęciem tej metodologii jest konsekwencja matrycowa (tj. operacja konsekwencji generowana przez macierz logiczną stosownego języka; pojęcie to pochodzi od Łosia i Suszki). W programie Wójcickiego uczestniczyła spora grupa logików (J. Czelakowski, W. Dziobiak, J. Hawranek, T. Prucnal, P. Wojtylak, A. Wroński, J. Zygmunt). Podsumowaniem ich badań jest monografia Wójcicki 1987. Książka Pogorzelski-Słupecki 1970 popularyzuje metodologię ogólną Tarskiego, a książka Pogorzelski-Wojtylak 1982 rozwija metodologię rachunków zdaniowych w duchu Łukasiewicza-Tarskiego, wzbogacając ją o nowe pojęcia i wyniki ogólne oraz rezultaty dotyczące indywidualnych rachunków zdaniowych. Nieopublikowana jeszcze monografia Janusza Czelakowskiego *Protoalgebraic Logics* stanowi dalekosiężną kontynuację badań przeprowadzonych w programie Wójcickiego, z wykorzystaniem logik abstrakcyjnych Suszki i zaawansowanych narzędzi współczesnej algebry ogólnej.

Roman Suszko i jego współpracownicy S. L. Bloom i D. J. Brown wzbogacili teorię konsekwencji Tarskiego o ogólne idee logiczno-algebraiczno-topologiczne (np. projektywnego i induktywnego generowania systemu domknięć, logicznego morfizmu, strukturalności i inwariantności) i stworzyli dziedzinę badań zwaną logiką abstrakcyjną (patrz Brown - Suszko 1973); dalsze wyniki w tym kierunku uzyskał później W. Dzik. Suszko w końcowych partiach swoich *Wykładów z logiki formalnej,* poświęconych konstrukcji pojęć logicznych (niezmienników absolutnych) w teorii typów, nawiązał do badań Tarskiego i Lindenbauma **[36b];** por. też **[86].**

Wanda Szmielew uczestniczyła w projekcie badawczym kierowanym przez Tarskiego i poświęconym zagadnieniu rozstrzygalności (patrz **[52pr])** i napisała rozprawę doktorską (opublikowaną w r. 1955), w której przedstawiła słynne twierdzenie o rozstrzygalności elementarnej teorii grup Abelowych. Następnie brała udział w programie poświęconym podstawom matematyki, specjalizując się w podstawach geometrii (patrz **[59pr]** i **[62pr]);** opublikowała z Tarskim abstrakt **[49ak],** artykuł **[52b]** oraz monografię **[83m].**

Lesław Szczerba został włączony do tego samego programu na początku lat sześćdziesiątych i pracował z Tarskim w dziedzinie geometrii (patrz **[65pr]; [65a], [79]).** Świeżo wydana publikacja **[99]** zawiera wiele ważnych i dotychczas szerzej nieznanych informacji na temat samego systemu geometrii Tarskiego, jego historycznej ewolucji oraz współpracy Tarskiego z innymi uczonymi, w tym z Wandą Szmielew.

Ewa Orłowska używa algebr relacyjnych w formalnej semantyce dla logik nieklasycznych oraz systemów logicznych, które powstały w związku z rozwojem informatyki i programowania.

Pod wpływem idei semantycznych (teoriomodelowych) Tarskiego pozostawała polska metodologia logiczna, w szczególności tacy jej reprezentanci, jak Maria Kokoszyńska-Lutmanowa, Marian Przełęcki i Ryszard Wójcicki (patrz np. M. Przełęcki, R. Wójcicki (red): *Twenty-five Years of Logical Methodology in Poland.* D. Reidel - PWN 1977).

VI. PODSUMOWANIE. Wielu uważa, że Alfred Tarski to jeden z największych wśród wszystkich logików, jak Arystoteles, Frege i Gödel. Czesław Miłosz widział w nim Einsteina Zachodniego Wybrzeża. Dla całej plejady badaczy teorii mnogości Tarski był Mojżeszem, który swemu ludowi wskazał drogę do Ziemi Obiecanej - krainy zbiorów (metafora Azriela Levy'ego). Był matematykiem prawdy i najprawdziwszym logikiem matematyki. Jego twórczość usprawiedliwia wszystkie określenia tego rodzaju.

Summary

This is an essay on Alfred Tarski's life and work. It belongs to the journal's "Post-war Philosophy in Poland" series, and has been arranged as follows:

Parts I and II are bibliographies. Part I lists the main body of Tarski's published works: his monographs (§ I-A), articles (§ I-B), editorial works (§ I-C) and letters (§ I-D).

Part II gives a selection of papers on Tarski's life and work, as well as articles and books which refer to, expound or develop Tarski's ideas.

Part III is a short biography of Alfred Tarski as logician, mathematician, teacher and prominent figure in the international scientific community.

Part IV surveys five areas of Tarski's work:

1. set theory
2. algebra (Boolean, relational, cylindric, Brouwerian and closure)
3. logical calculi
4. metamathematics
5. semantics

Part V traces Tarski's influence on the development of logic, scientific semantics and methodology in Poland through figures such as Presburger, Mostowski, Łoś, Pogorzelski, Rasiowa, Sikorski, Suszko, Szmielew and Wójcicki.