EDUKACJA FILOZOFICZNA
Vol. 26 1998

ANNA WÓJTOWICZ
Uniwersytet Warszawski

O POJĘCIU EKSTENSJONALNOŚCI

Celem artykułu jest precyzacja pojęcia ekstensjonalności i wskazanie, jakie założenia leżą u podstaw najczęściej przyjmowanych definicji tego pojęcia. Prowadzone rozważania oparte są z jednej strony na logice niefregowskiej, a z drugiej – na różnych sformułowaniach zasady ekstensjonalności zaproponowanych przez Ruth Barcan. Pokażemy, że te dwa podejścia są w efekcie równoważne i sformułujemy – korzystając z możliwości dostarczanych przez logikę niefregowską – ogólną definicję pojęcia ekstensji zdania.

Na wstępie zauważmy, że stwierdzenie, iż dany system (a dokładniej język tego systemu) jest ekstensjonalny, jest do pewnego stopnia wartościujące – świadczyć o tym mogą choćby próby eliminacji tzw. kontekstów intensjonalnych. Tadeusz Kotarbiński pisze na ten temat tak:

„Żywe jest zagadnienie eliminacji funkcji intensjonalnych, które wyłamują się spod reguł wnioskowania [...]. Powstaje co do nich podejrzenie, że są to wadliwe formy wypowiadania się i że wszelki napis zdaniowy poprawny winien być ekstejsjonalny”[1].

Wobec powyższego stwierdzenia dużego znaczenia nabiera dobra, precyzyjna definicja pojęcia ekstensjonalności, w której jasno widoczne będą wszystkie jej relatywizacje i przyjęte (często arbitralnie) rozstrzygniecia filozoficzne.

Ogólnie – idąc także za sugestią Kotarbińskiego[2] i nie rozstrzygając na razie, czym jest ekstensja zdań i nazw – można sformułować następującą definicję:

DEFINICJA 0

ϕ jest **funktorem ekstensjonalnym** zawsze i tylko, gdy ekstensja wyrażenia złożonego zbudowanego za pomocą funktora ϕ jest w sposób jednoznaczny wyznaczona przez ekstensje jego argumentów.

Aby nie rozważać tak ogólnej postaci tej definicji posłużmy się teorią kategorii syntaktycznych Ajdukiewicza. Zgodnie z tą teorią funktory mogą być różnych kategorii. Rozważmy tylko niektóre z nich, te najbardziej typowe:

---

[1] T. Kotarbiński: *Elementy teorii poznania, logiki formalnej i metodologii nauk*. Warszawa 1986, s. 375.

[2] Tamże, s. 374.

1) funktory zdaniotwórcze od argumentów zdaniowych (spójniki);
2) funktory zdaniotwórcze od argumentów nazwowych (predykaty);
3) funktory zdaniotwórcze od argumentów nazwowych (symbole funkcyjne).

Niech teraz przekształcenia f: $N \rightarrow U_1$ i g: $S \rightarrow U_2$ będą odpowiednio przekształceniami przypisującymi nazwom i zdaniom ich ekstensje. U_1 i U_2 są więc odpowiednio zbiorami ekstensji dla nazw i dla zdań. Wtedy dla poszczególnych typów funktorów definicje ekstensjonalności nają następujące postacie:

DEFINICJA 1.1
k-argumentowy spójnik zdaniowy v jest **ekstensjonalny** zawsze i tylko wtedy, gdy $\bigwedge \alpha_1, .. \alpha_k \in S \bigwedge \beta_1, .. \beta \in S$ jeśli $g(\alpha_1) = g(\beta_1)$ i ... i $g(\alpha_k) = g(\beta_k)$, to $g(v(\alpha_1, .. \alpha_k)) = g(v(\beta_1, .. \beta_k))$.

DEFINICJA 1.2
k-argumentowy predykat P jest **ekstensjonalny** zawsze i tylko wtedy, gdy $\bigvee n_1, .. n_k \in N \bigwedge m_1, .. m_k \in N$ jeśli $f(n_1) = f(m_1)$ i ... i $f(n_k) = f(m_k)$, to $g(P(n_1, .. n_k)) = g(P(m_1, .. m_k))$.

DEFINICJA 1.3
k-argumentowy symbol funkcyjny ϕ jest **ekstensjonalny** zawsze i tylko wtedy, gdy $\bigwedge n, .. n_k \in N \bigwedge m_1, .. m_k \in N$ jeśli $f(n_1) = f(m_1)$ i ... i $f(n_k) = f(m_k)$, to $f(\phi(n_1, .. n_k)) = f(\phi(m_1, .. m_k))$.

Widać więc, że to, czy funktor jest ekstensjonalny, zależy od własności przekształcenia g (dla spójników), od własności funkcji f (dla symboli funkcyjnych) oraz od relacji między własnościami przekształceń f i g (dla predykatów)[3].

Formułując powyższe definicje nie zakładaliśmy nic o własnościach przekształceń f i g. Właściwie jedynym warunkiem formalnym jest to, że relacje posiadania tej samej ekstensji muszą być relacjami równoważnościowymi, a więc, że przekształcenia te muszą być funkcjami. O funkcji f wiemy stosunkowo dużo – w standardowym języku logiki pierwszego rzędu z predykatem identyczności problem równości ekstensji nazw jest rozstrzygnięty w samym języku – dwie nazwy n i m mają taką samą ekstensję, gdy prawdziwe jest zdanie "$n = m$". Jeśli natomiast badamy język pierwszego rzędu bez predykatu identyczności, równość ekstensji nazw próbuje się odtworzyć za pomocą relacji nieodróżnialności ze względu na własności obiektów opisywanych w danym języku. Taka charakterystyka ekstensji wyrażeń naz-

[3] Zauważmy, że szczególną postacią definicji 1.3 jest tzw. aksjomat ekstensjonalności sformułowany w następujący sposób: Dla dowolnych $x_1, .. x_k, y_1, .. y_k$, jeśli $x_1 = y_1$ i ... i $x_k = y_k$, to $\{y_1, .. x_k\} = \{y_1, .. y_k\}$.

wowych jest jednak istotnie słabsza od równości ekstensji stwierdzanej za pomocą predykatu identyczności[4]. Zauważmy również, że nawet mając w języku predykat identyczności, aby stwierdzić, że dwa wyrażenia nazwowe n i m mają (na gruncie pewnej teorii) tę samą ekstensję musimy wiedzieć, że tezą tej teorii jest zdanie "$n = m$". Jeśli rozpatrywana teoria jest słaba (zawiera np. tylko tezy logiki pierwszego rzędu), to jedynym przykładem prawdziwych twierdzeń postaci "$n = m$", są twierdzenia, w których nazwy n i m są równokształtne. Innymi słowy, ekstensja nazwy – w tym wypadku jest tym samym, co klasa abstrakcji od relacji równokształtności wyznaczonej przez tę nazwę. Fakt ten wykorzystuje się przy konstrukcji tzw. modelu na termach dla logiki pierwszego rzędu. Zauważmy, że jeśli dla dowolnego wyrażenia nazwowego n utożsamimy $f(n)$ i "n" (jak to się robi właśnie przy konstrukcji modelu na termach), to wszystkie symbole funkcyjne są z definicji ekstensjonalne.

Nas szczególnie interesować będzie ekstensja zdań, a więc własności funkcji g. W języku klasycznej logiki zdaniowej nie występuje spójnik identyczności, który pełniłby podobną rolę przy orzekaniu równości ekstensji zdań, jak predykat identyczności pełni w odniesieniu do funkcji f. Stosując logikę klasyczną musimy więc o równości wartości funkcji g mówić w metajęzyku.

Wydaje się nie budzić wątpliwości, że warunkiem koniecznym równej ekstensji zdań jest równość ich wartości logicznych (*val*), a warunkiem wystarczającym – równość kształtu (*k*):

1) $[k(\alpha) = k(\beta) \Rightarrow [g(\alpha) = g(\beta)]$;

2) $[g(\alpha) = g(\beta) \Rightarrow [val\,(\alpha) = val\,(\beta)]$.

Implikacja pierwsza wynika stąd, że z założenia język, którym się posługujemy, nie zawiera homonimów. Jest to warunek, który trzeba przyjąć, aby w ogóle móc precyzyjnie posługiwać się językiem.

Implikacja druga oparta jest na naszym rozumieniu prawdziwości zdania, jako czymś, co przysługuje zdaniu obiektywnie i zależy wyłącznie od tego, o czym zdanie orzeka, a nie np. od czyjegoś przekonania o prawdziwości zdania. Innymi słowy, gdyby ten warunek zanegować, to zdania o tej samej ekstensji mogłyby mieć różne wartości logiczne. Takie podejście uniemożliwiałoby jednak uprawianie logicznej – w tradycyjnym rozumieniu – analizy języka naturalnego.

Kontrowersyjnym, ale wartym uwagi warunkiem nakładanym na funkcję g jest warunek następujący:

3) $\bigwedge \alpha,\beta \in S$ jeśli $g(\alpha) = g(\beta)$, to $(\alpha \Leftrightarrow \beta)$ jest tezą logiki, którą przyjmujemy w danym języku.

[4] Por. np.: J. Zygmunt, J. Hawranek: *O identyczności logicznej*. [w:] M. Omyła (red.): *Skłonność metafizyczna*. Warszawa 1998.

Innymi słowy – mówiąc trochę nieformalnie – warunek ten stwierdza, że logika „widzi", które zdania mają tę samą ekstensję.

Warunek ten pokazuje w szczególności, że to, jakie własności ma funkcja g, a więc w konsekwencji to, czy dany funktor uznamy za ekstensjonalny, czy nie, może zależeć również od tego, jaka logika «rządzi» naszym językiem.

PRZYKŁAD

Załóżmy, że funkcja g jest zdefiniowana w taki sposób, że $g(\alpha) = g(\neg\neg\alpha)$. Jeżeli w naszym języku obowiązuje logika intuicjonistyczna, to warunek (3) nie jest spełniony, bo formuła $(\alpha \Leftrightarrow \neg\neg\alpha)$ nie jest tezą tej logiki. Pokazuje to, że w logice intuicjonistycznej **czym innym** jest stwierdzenie, że α i stwierdzenie, że nieprawda, że nie α.

Rozważmy teraz trzy najprostsze definicje ekstensji zdania, utożsamiające wartości funkcji g z jej możliwymi skrajnymi ograniczeniami:

DEFINICJA 2

$g(\alpha) = g(\beta)$ zawsze i tylko, gdy $k(\alpha) = k(\beta)$.

W tym wypadku $g(\alpha)$ jest klasą abstrakcji od relacji równokształtności na zbiorze zdań, wyznaczoną przez α (albo po prostu $g(\alpha) =$ "α").

Takie stanowisko można przypisać nominalistom. Przy tym ujęciu ekstensjonalne są wszystkie spójniki, a w szczególności takie spójniki jak „jest konieczne, że" czy „jest powszechnie wiadomo, że". Wynika to stąd, że skoro zdania α i β są równokształtne, to równikształtne są również odpowiednio zdania „jest konieczne, że α", „jest konieczne, że β" i „jest powszechnie wiadomo, że α", „jest powszechnie wiadomo, że β".

DEFINICJA 3

$g(\alpha) = g(\beta)$ zawsze i tylko, gdy $val(\alpha) = val(\beta)$.

W takim wypadku g(a) jest klasą abstrakcji od relacji posiadania tej samej wartości logicznej w zbiorze zdań, wyznaczoną przez α (albo po prostu $g(\alpha) = val(\alpha)$).

Stanowisko to jest bardzo popularne (por. np. hasło "ekstensja" w *Słowniku pojęć filozoficznych*[5]) – jego pierwszym reprezentantem był Gottlob Frege, który twierdził, że wszystkie zdania prawdziwe odnoszą się do jednego obiektu – Prawdy, a wszystkie zdania fałszywe – do Fałszu. Zgodnie z tym stanowiskiem należy utożsamić wartościowania algebraiczne i logiczne formuł[6]. Przy tym ujęciu ekstensjonalne są jedynie spójniki prawdziwościowe – a więc pojęcia „spójnik ekstensjonalny" i „spójnik prawdziwościowy" traktujemy jako synonimy.

DEFINICJA 4

$g(\alpha) = g(\beta)$ zawsze i tylko, gdy $(\alpha \Leftrightarrow \beta)$ jest tezą danej logiki.

---

[5] W. Krajewski (red.): *Słownik pojęć filozoficznych*. Warszawa 1996.

[6] Por. np.: R. Suszko: *Aksjomat Fregego a polska logika matematyczna lat 20-tych*. [w:] M. Omyła (red.): *Roman Suszko. Wybór pism*. Warszawa 1998.

W takim wypadku $g(\alpha)$ jest klasą abstrakcji od relacji równoważności na gruncie danej logiki, wyznaczoną przez α.

Przedstawicielem tego stanowiska jest Wittgenstein, który w tezie 5.141 *Traktatu logiczno-filozoficznego* twierdził:

„Jeśeli z p wynika q, a z q wynika p, to są one jednym i tym samym zdaniem".

Przy takim ujęciu ekstensjonalny może być spójnik konieczności (w logikach, w których obowiązuje reguła Gödla i reguła rozdzielności konieczności względem implikacji), ale nie jest ekstensjonalny spójnik „jest powszechnie wiadomo, że".

Okazuje się, że powyższe trzy definicje można w elegancji sposób uogólnić – przydaje się do tego właśnie logika niefregowska.

DEFINICJA 5

$g(\alpha) = g(\beta)$ zawsze i tylko gdy $\alpha \equiv \beta$ jest tezą pewnej teorii w logice niefregowskiej[7].

Taka możliwość wynika stąd, że logika niefregowska – i każda sformułowana w niej teoria – pozwala opisywać strukturę ontologii sytuacji – czyli po prostu strukturę zbioru U_2 ekstensji zdań. Jeśli chemy uzyskać takie rozumienie pojęcia ekstensji, jakie proponuje definicja 2, musimy przyjąć, że tą teorią jest po prostu zbiór tez logiki SCI (logiki niefregowskiej). Jeśli chcemy rozumieć pojęcie ekstensji zgodnie z definicją 3 – przyjmujemy teorię fregowską (tzn. teorię zawierającą jakąś formę aksjomatu Fregego[8]), jeśli wreszcie ekstensję rozumiemy zgodnie z definicją 4 – przyjmujemy teorię WT[9] (która, jak wiadomo, pozwala na formalizację tez ontologicznych *Traktatu*). Zaproponowane w definicji 5 podejście otwiera drogę do nieskończenie wielu definicji wartości funkcji g, a więc ekstensji zdania – ponieważ każda teoria w logice niefregowskiej taką ekstensję wyznacza.

Z powyższych rozważań można wyprowadzić następujące wnioski:

Wniosek I

Dla każdej klasy spójników istnieje taka definicja ekstensji zdań (funkcji g), że ze względu na tę definicję wszystkie spójniki są ekstensjonalne.

---

[7] Spójnik "$\equiv$" jest tu pewnym dodatkowo wprowadzonym do języka logiki klasycznej spójnikiem identyczności, charakteryzowanym przez następujące aksjomaty:
i) $\alpha \equiv \alpha$;
ii) $(\alpha \equiv \beta) \Rightarrow (\neg\alpha \equiv \neg\beta)$;
iii) $[\alpha \equiv \beta) \wedge (\gamma \equiv \delta)] \Rightarrow [(\alpha * \gamma) \equiv (\beta * \delta)]$,
gdzie $* \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \equiv\}$;
iv) $(\alpha \equiv \beta) \Rightarrow (\alpha \Leftrightarrow \beta)$.

[8] Aksjomat Fregego może mieć np. postać: $(\alpha \equiv \beta) \Leftrightarrow (\alpha \Leftrightarrow \beta)$.

[9] Aksjomatami teorii WT są wszystkie formuły postaci: $\alpha \equiv \beta$, gdy $\alpha \Leftrightarrow \beta$ jest tezą logiki klasycznej (por. np.: M. Omyła: *Zarys logiki niefregowskiej*. Warszawa 1986).

Wniosek 2

Każdy spójnik prawdziwościowy jest ekstensjonalny ale nie każdy spójnik ekstensjonalny jest prawdziwościowy. Równość wartości logicznych jest tylko warunkiem koniecznym a nie wystarczającym równości ekstensji zdań. Przykładem spójnika ekstensjonalnego ale nie prawdziwościowego jest spójnik identyczności w logice niefregowskiej.

W artykule Ruth Barcan Marcus[10] można znaleźć równoważne, choć mające nieco inny punkt wyjścia spojrzenie na problem niejednoznaczności pojęcia ekstensjonalności. Autorka formułuje nie tyle definicje funktora ekstensjonalnego, ale podaje ogólną postać zasady ekstensjonalności, którą następnie, w różny sposób, doprecyzowuje, otrzymując w efekcje różne postacie tej zasady.

Przez zasadę ekstensjonalności rozumie Barcan pewną ogólną zasadę pozwalającą eliminować z języka funktory uznane za intensjonalne.

ZASADA EKSTENSJONALNOŚCI

(I) jeśli ($\zeta \approx \xi$), to ($A\,[\xi] \approx^* (A\,[\zeta/\xi]$,

gdzie $A\,[\zeta]$ jest tu dowolnym *kontekstem*, w którym występuje ζ, $A\,[\zeta/\xi]$ jest tym samym kontekstem, w którym ζ zastąpiono przez ξ, a $\approx$ i $\approx^*$ są pewnymi relacjami równoważności.

Zasada ta nakłada ograniczenia na dopuszczalne w danym języku konteksty. Jej siła zależy od tego, jak będziemy rozumieć występujące w niej relacje równoważności $\approx$ i $\approx^*$. Barcan *a priori* nie zakłada, że są to takie same relacje. Ze względu jednak na to, że ograniczamy się jedynie do kontekstów zdaniowych (A traktujemy jako spójnik zdaniotwórczy od argumentu zdaniowego), będziemy rozważać tylko takie warianty zasady ekstensjonalności wymieniane przez autorkę, w których $\approx$ i $\approx^*$ są tożsamymi relacjami równoważności określonymi w zbiorze zdań.

Niech $\approx$ ($\approx^*$) będzie identycznością numeryczną (oznaczaną przez "="). Wtedy zasada (I) ma postać

(I.I) Jeśli $\alpha = \beta$, to $A\,[\alpha] = A\,[\alpha/\beta]$

Zasada ta jest bardzo słaba, bo nie eliminuje żadnego kontekstu powszechnie uważanego za intensjonalny – za A można podstawić wyrażenie takie jak „jest konieczne, że" czy „jest powszechnie wiadomo, że". Zasada (I.I) jest odpowiednikiem definicji 2.

Niech $\approx$ ($\approx^*$) będzie równoważnością materialną (tzn. równością wartości logicznych). Wtedy (I) ma postać

(I.II) Jeśli $val\,(\alpha) = val\,(\beta)$, to $val\,(A\,[\alpha]) = val\,(A\,[\alpha/\beta])$.

---

[10] "Mind" 1967 (3), s. 55-62.

Jest to zasada istotnie mocniejsza od poprzedniej, bo eliminuje jako intensjonalne wszystkie konteksty nieprawdziwościowe. Jest ona odpowiednikiem definicji 3.

Niech ≈ (≈ *) będzie równoważnością na gruncie danej logiki **L**. Wtedy (I) ma postać

(I.III) Jeśli ($\alpha \Leftrightarrow \beta$) jest tezą logiki **L**, to ($A\,[\alpha] \Leftrightarrow A\,[\alpha/\beta]$) jest tezą logiki **L**. Jest to zasada jawnie zrelatywizowana do przyjęcia danej logiki **L**. Jakie konteksty intensjonalne eliminuje (I.II)? Oczywiście takie jak: „Jan wierzy, że" itp., ale nie musi eliminować kontekstów typu „jest prawdą logiczną, że", „jest konieczne, że" itp., gdyż jest to zależne od własności logiki **L**. Ta zasada stanowi odpowiednik definicji 4.

Podsumowując nasze rozważania można sformułować następujące wnioki.

Wniosek III

Odpowiedź na pytanie, czy dany system jest ekstensjonalny, sprowadza się do stwierdzenia, czy obowiązuje w nim określona zasada ekstensjonalności. Zależy więc istotnie od wyboru tej zasady. System uważany za ekstensjonalny przez jednych nie jest ekstensjobnalny w opinii innych (dobrym przykładem takiego «dwuznacznego» systemu jest logika niefregowska, ze względu na występujący w niej spójnik identyczności).

WNIOSEK IV

Wybór określonej zasady ekstensjonalności jest równoważny wyborowi definicji ekstensji dla zdań, a więc przyjęcia pewnej teorii w logice niefregowskiej.

Bacan wskazała trzy różne zasady sformułowania zasady ekstensjonalności. Na gruncie logiki niefregowskiej można zdefiniować nieskończenie wiele różnych sensów pojęcia ekstensji.

WNIOSEK V

Ponieważ zasady ekstensjonalności (definicje ekstensji zdań) można częściowo uporządkować, można też mówić o różnym stopniu ekstensjonalności danego systemu.

Summary

In this article the notion of extensionality is discussed. I show, which presuppositions are basic to the most common definition of this notion. My considerations are conducted within the framework of non-fregean logic and several definitions of the principle of extensionality given by Ruth Barcan. I show that both these approaches are equivalent and I give a general definition of the extension of a sentence.