EDUKACJA FILOZOFICZNA
Vol. 21 1996

JÓZEF WAJSZCZYK
Wyższa Szkoła Pedagogiczna
w Olsztynie

TRÓJWARTOŚCIOWY RACHUNEK ZDAŃ J. ŁUKASIEWICZA A KLASYCZNY RACHUNEK LOGICZNY

Zgodnie z zasadą trójwartościowości logicznej, każde zdanie w sensie logiki ustalonego języka J, czyli wyrażenie tego języka będące nośnikiem wartości logicznej, jest prawdziwe albo fałszywe. Prawdziwość oraz fałszywość to, ściśle rzecz ujmując, własności zdań zrelatywizowane do możliwych interpretacji $\mathfrak{I}$ języka J. Mówiąc o prawdziwości względnie fałszywości w ogóle, bez relatywizacji do modeli języka, zakładamy milcząco, że chodzi o prawdziwość (fałszywość) w modelu właściwym $\mathfrak{I}^*$, stanowiącym zamierzoną interpretację języka J. Model $\mathfrak{I}^*$ (podobnie jak każda inna możliwa interpretacja $\mathfrak{I}$ języka J), generuje podział ogółu zdań języka J na zbiór zdań prawdziwych (**1**) oraz zbiór zdań fałszywych (**0**) tego języka. Taki podział, czyli $\boldsymbol{P} = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ nazywamy podziałem fundamentalnym.

Zasada dwuwartościowości logicznej stanowi podstawę klasycznego rachunku logicznego. Znane są jednak różne próby zakwestionowania zasady dwuwartościowości, mające swe źródła w różnych problemach natury filozoficznej. Wśród nich na czołowym miejscu plasuje się ta, która powstała z refleksji nad wartością logiczną zdań opisujących niezdeterminowane zdarzenia przyszłe. Myśl, że zdania dotyczące niezdeterminowanych jeszcze zdarzeń przyszłych nie są (przynajmniej obecnie) ani prawdziwe, ani fałszywe, tylko jakieś trzecie, została wyraźnie wyartykułowana w słynnym dziewiątym rozdziale *Hermeneutyki* Arystotelesa w postaci znanego rozważania na temat „jutrzejszej bitwy morskiej". Czołowi przedstawiciele szkoły lwowsko-warszawskiej, Tadeusz Kotarbiński i Jan Łukasiewicz, podjęli ten temat w głośnej dyskusji na temat „czy prawda jest odwieczna czy tylko wieczna?". Zdaniem T. Kotarbińskiego, „warunkiem możności stworzenia czegoś jest to, aby sąd twierdzący o tym czymś nie był ani prawdą ani fałszem" ([2] s. 80-81). J. Łukasiewicz pisał: „...istnieją zdania, które nie są ani prawdziwe ani fałszywe tylko jakieś obojętne. Takimi są wszystkie zdania o faktach przyszłych, które nie są jeszcze obecnie przesądzone (...) zdaniom tym nie odpowiada ontologicznie ani byt ani niebyt tylko możliwość. Zdania obojętne, którym ontologicznie odpowiada możliwość, mają trzecią wartość logiczną" ([3] s. 125).

Posługując się pojęciami „prawdziwość", „fałszywość" oraz „wartość trzecia" (jako synonim tego ostatniego będziemy też, zgodnie z J. Łukasiewiczem, używać terminu „możliwość"), J. Łukasiewicz odchodzi najwyraźniej od znaczeń tych pierwszych dwóch pojęć, jakie ustaliła klasyczna koncepcja prawdy.

By opisać te różne znaczenia, posłużmy się symbolami *Ver* (α), Fals (a), *VerŁ* (α), *FalsŁ* (α), *PosŁ* (α) jako skrótami odpowiednio zwrotów:
Ver (α) — zdanie α jest prawdziwe w sensie klasycznym;
Fals (α) — zdanie α jest fałszywe w sensie klasycznym;
VerŁ (α) — zdanie α jest prawdziwe w sensie Łukasiewicza;
FalsŁ (α) — zdanie α jest fałszywe w sensie Łukasiewicza;
PosŁ (α) — zdanie α jest możliwe w sensie Łukasiewicza.

Niech *s* będzie funkcją określoną na zbiorze zdań języka *J*, której wartościami są korelaty semantyczne zdań, inaczej niech *s* (α) oznacza „to, co przedstawia zdanie α". Analizowane przez nas własności zdań można, ujmując rzecz ogólnie, określić następująco:

Dla dowolnego zdania α języka *J*:
1. *Ver* (α) ≡ *s* (α) jest faktem;
2. *Fals* (α) ≡ *s* (α) nie jest faktem;
3. *VerŁ* (α) ≡ obecnie jest przesądzone to, że *s* (α) jest faktem;
4. *FalsŁ* (α) ≡ obecnie jest wykluczone by *s* (α) było faktem;
5. *PosŁ* (α) ≡ obecnie nie jest przesądzone to, że *s* (a) jest faktem i nie jest wykluczone by *s* (α) było faktem.

Zgodnie z intuicjami wyrażonymi przez J. Łukasiewicza, zdania opisujące sytuacje przeszłe, teraźniejsze czy pozaczasowe, a także zdania analityczne mogą być prawdziwe albo fałszywe; zdania opisujące sytuacje przyszłe, dla których istnieje przyczyna w teraźniejszości są prawdziwe; zdania opisujące sytuacje przyszłe, dla których istnieją w teraźniejszości przyczyny wykluczające ich zajście są fałszywe; zaś możliwymi są takie zdania opisujące przyszłość, których korelaty semantyczne nie są obecnie ani przyczynowo przesądzone, ani wykluczone[1].

Niech $P_Ł$ = {$0_Ł$, $M_Ł$, $1_Ł$} oznacza podział ogółu zdań języka *J* na zdania *Ł* — fałszywe (fałszywe w sensie Łukasiewicza), *Ł* — możliwe i *Ł* — prawdziwe. Należy zaakcentować, że przyjęcie tego trójczłonowego podziału nie oznacza odrzucenia dwuczłonowego podziału fundamentalngo *P* = {0,1}. Każdy z tych podziałów ma jako swoją podstawę inne kryterium i każdy z nich jest, z formalnego punktu widzenia, równie dobry.

Naturalnie, możliwe jest skrzyżowanie obu tych podziałów i badanie związków między członami otrzymanego w ten sposób podziału.

---

[1] Warto odnotować, że w sprawie wartości logicznej zdań o przeszłości Łukasiewicz nie był konsekwentny. W jednym tekście ([3]) znajdujemy zarówno tezę: „...co się stało odstać się nie może. Wszelka prawda jest wieczna" (s. 116), jak i „... Ale i przeszłość powinniśmy traktować nie inaczej niż przyszłość. Jeżeli z przyszłości to tylko dziś jest realne, co wyznaczone jest przyczynowo przez chwilę dzisiejszą, a zaczynające się w przyszłości łańcuchy przyczynowe należą dziś jeszcze do sfery możliwości, to i z przeszłości to tylko dziś jest realne, co dziś jeszcze działa w skutkach. Fakty, które się w swych skutkach wyczerpały całkowicie należą do sfery możliwości. Nie można o nich twierdzić, że były, lecz tylko, że były możliwe" (s. 126).

Jan Łukasiewicz był jednak przekonany, że wprowadzenie jego podziału ***PŁ*** oznacza odrzucenie podziału fundamentalnego, czyli odrzucenie zasady dwuwartościowości. Mając na myśli tę zasadę, pisał: „Zasada ta... nie może być udowodniona. Można w nią tylko wierzyć, a wierzy w nią tylko ten, komu wydaje się ona oczywistą. Mnie osobiście nie wydaje się ona oczywistą. Wolno mi tedy tej zasady nie uznać" ([3] s. 125).

„Odrzuceniu" zasady dwuwartościowości i przyjęciu w jej miejsce zasady trójwartościowości logicznej przypisywał Łukasiewicz znaczenie fundamentalne. Był przekonany, że oznacza to ni mniej ni więcej jak przewrót w podstawach myślenia. („Wprowadzając tę trzecią wartość do logiki, zmieniamy ją od podstaw") ([3] s. 125).

Skonstruowany przez J. Łukasiewicza trójwartościowy rachunek zdań (***Ł3***), będący ukoronowaniem jego poszukiwań adekwatnego narzędzia formalnego opisu rzeczywistości, zwłaszcza w obszarze związanym z determinizmem, indeterminizmem i problematyką możliwości, nie spełnił oczekiwań twórcy. Rachunek ten, jak też powstałe w jego wyniku uogólnienia, wielowartościowe rachunki zdaniowe J. Łukasiewicza, nie spowodował spodziewanego przełomu w sposobie myślenia. Wielowartościowe rachunki zdaniowe J. Łukasiewicza nie spowodowały rewolucji ani w logice, ani w matematyce czy filozofii. Nie okazały się bardziej doskonałym narzędziem formalnym w stosunku do tradycyjnego klasycznego rachunku logicznego. Nic nie wskazuje nawet na to, by logika trójwartościowa J. Łukasiewicza stanowiła lepszą od klasycznego rachunku logicznego podstawę formalną rozumowań dotyczących niezdeterminowanej przyszłości. Co gorsza, istnieją podstawy by twierdzić, że ***Ł3*** nie stanowi adekwatnego odzwierciedlenia zależności między ***Ł*** — wartościami logicznymi zdań. Formalny opis spójnoków ***Ł3*** pozostaje w sprzeczności z pewną podstawową intuicją.

Otóż jeżeli pewnemu zdaniu α przysługuje trzecia wartość logiczna (obecnie nie jest przesądzone ani wykluczone, że zajdzie to, co głosi zdanie α), to również zdaniu $\sim\alpha$ przysługuje wartość trzecia. Jednak zdanie $\alpha \wedge \sim\alpha$ winno być uznane za fałszywe (jest przecież obecnie wykluczone, by zaszło to, co głosi to zdanie), wbrew formalnej charakterystyce spójnika koniunkcji w ***Ł3*** (w tym przypadku zdaniu $\alpha \wedge \sim \alpha$ przysługuje zgodnie z tabelką dla koniunkcji, wartość trzecia!). Dopuszczenie, że schemat postaci $\alpha \wedge \sim \alpha$ może przyjmować wartość różną od fałszu (nie jest kontrtautologią), oznacza naturalnie, że występujące w nim spójniki koniunkcji i negacji otrzymują jakieś specyficzne, różne od klasycznego, znaczenie. Rachunek ***Ł3*** konstruuje właśnie te nowe znaczenia dla wszystkich spójników zdaniowych noszących te same nazwy, co spójniki występujące w klasycznym rachunku zdań. Aczkolwiek pzydatność ***Ł3*** w rozumowaniach przeprowadzonych w praktyce myślowej jest co najmniej wątpliwa, to rachunek ten jest pewnym tworem formalnym i jako taki (niezależnie od przyjmowanych intuicji) jest interesującym obiektem badań formalno-logicznych. W szczególności można badać związki formalne między ***Ł3*** a klasycznym rachunkiem zdań jako dwoma systemami formalnymi. ***Ł3*** stanowi podsystem klasycznego rachunku zdań, w tym sensie, że oba te rachunki są sformułowane w tym samym języku zdaniowym i każda teza ***Ł3*** jest zarazem tezą ***KRZ***, chociaż nie na odwrót. Jednak fakt, że ***Ł3*** jest podsystemem ***KRZ*** a nie na odwrót, nie może świadczyć na rzecz tezy o większej mocy dedukcyjnej tego drugiego. Fakt, że niektóre tezy ***KRZ*** (np. prawo wyłączonego środka: $p \vee \sim p$) nie są dowodliwe w ***Ł3***, nie oznacza, że możliwości dedukcyjne ***KRZ*** są większe. Należy pamiętać, że równokształtne formuły nabierają na gruncie każdego z tych rachunków różnych znaczeń!

Jest znanym faktem z dziedziny teorii rachunków zdaniowych, że za pomocą spójników ***Ł3*** można zdefiniować spójniki mające formalne własności spójników dwuwartościowych z klasycznego rachunku zdań. Niech: $\sim, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ oznaczają spójniki klasyczne, a $\sim_3, \wedge_3, \vee_3, \rightarrow_3, \leftrightarrow_3$ odpowiednie spójniki z ***Ł3***. Definiowalność spójników klasycznych w rachunku ***Ł3*** wyrażają następujące definicje:

$$(\alpha \rightarrow \beta) \underset{def}{\equiv} (\alpha \rightarrow_3 (\alpha \rightarrow_3 \beta)$$

$$\sim \alpha \underset{def}{\equiv} (\alpha \rightarrow_3 \sim_3 \alpha)$$

$$\alpha \vee \beta \underset{def}{\equiv} \sim \alpha \rightarrow \beta$$

$$\alpha \vee \beta \underset{def}{\equiv} \sim (\sim \alpha \rightarrow \sim \beta)$$

$$\alpha \leftrightarrow \beta \underset{def}{\equiv} (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$$

Oznacza to, że w Ł3 nożna udowodnić formuły zbudowane ze zmiennych zdaniowych i tych nowozdefiniowanych spójików $\sim, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$, mające postać aksjomatów klasycznego rachunku zdań, jak również można wykazać, że reguła odrywania oraz reguła podstawiania, dla tak określonych formuł, są wyprowadzalne w ***Ł3***. Wynik tem wskazuje na odtwarzalność całego dwuwartościowego klasycznego rachunku zdań w trójwartościowym rachunku ***Ł3***. Analogiczny związek zachodzi między wszystkimi wielowartościowymi rachunkami J. Łukasiewicza a ***KRZ***. W świetle tego wyniku nasuwa się domniemanie, że ***Ł3*** jest logiką jakby bogatszą, dedukcyjnie mocniejszą od ***KRZ***. Można w niej bowiem wyrazić wszystko, co jest wyrażalne w ***KRZ***, a dodatkowo (niewyrażalne w ***KRZ***) zależności formalne między zdaniami zbudowanymi za pomocą spójników będących jak gdyby bardziej subtelnymi wariantami spójników klasycznych.

Celem tego artykułu jest wykazanie, że ***Ł3*** jest odtwarzalny w pewnym systemie nadbudowanym nad ***KRZ***. System ten jest rachunkiem zdaniowym operującym klasycznymi spójnikami logicznymi i jednym specyficznym spójnikiem jednoargumentowym. Rachunek ten będziemy oznaczali symbolem ***R•***.

I. Językiem *J.* rachunku ***R•*** nazywamy algebrę formuł
$J. = \langle F., \sim, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \bullet \rangle$ o typie podobieństwa (1, 2, 2, 2, 2, 1), gdzie *F.* jest zbiorem formuł nad alfabetem $AL = V \cup S$
$(V = \{p, q, r, s...\}, S = \{\sim, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \bullet\})$.

II. Aksjimatykę rachunku ***R•*** stanowią:
AO. Wszystkie podstawienia tez klasycznego rachunku zdań w języku *J.*, a także wszystkie uszczegółowienia w języku *J.* następujących schematów formuł:

A1. $\bullet(\sim\alpha) \leftrightarrow \sim(\bullet\alpha)$,
A2. $\bullet(\alpha\wedge\beta) \leftrightarrow (\bullet\alpha\wedge\beta)$,
A3. $\bullet\bullet\alpha \leftrightarrow \alpha$.

Specyficzną regułą inferencji (poza odzoedziczoną z *KRZ* regułą odrywania RO) jest

$$\text{R:}\quad \frac{(\alpha\leftrightarrow\beta)}{(\bullet\alpha\leftrightarrow\bullet\beta)}$$

III. Tezami *R*• są wszystkie i tylko te formuły języka *J.*, które są wyprowadzalne z aksjomatów *R*• za pomocą reguł *KRZ* oraz reguły R w skończonej ilości kroków.

Stosunkowo łatwo można wykazać, że tezami *R*• są formuły *J.* o następujących schematach:
T1. $\bullet(\alpha\vee\beta) \leftrightarrow (\bullet\alpha\vee\bullet\beta)$,
T2. $\bullet(\alpha\rightarrow\beta) \leftrightarrow (\bullet\alpha\rightarrow\bullet\beta)$,
T3. $\bullet(\alpha\leftrightarrow\beta) \leftrightarrow (\bullet\alpha\leftrightarrow\bullet\beta)$.

Tezy te orzekają rozdzielność spójnika • względem alternatywy, implikacji i równoważności i wraz z aksjomatami A1, A2, A3, pozwalają na równoważnościowe przetransponowanie dowolnej formuły języka *J.* w formułę, w której argumentami wszystkich spójników klasycznych są bądź pojedyncze zmienne zdaniowe p_i, bądź formuły postaci $\bullet\, p_i$, bądź superpozycje takich formuł za pomocą funktorów klasycznych. Formuły o takiej szczególnej postaci będziemy nazywać formułami unormowanymi. Powyżej opisaną zależność można ująć w następującym metatwierdzeniu:

Dla dowolnej formuły α języka *J.* istnieje unormowana α' tego języka taka, że $\alpha \leftrightarrow \alpha'$ jest tezą *R*•.

Przykładowo unormowaną postacią formuły:
$\bullet(p\rightarrow\bullet\sim q)\rightarrow\bullet(\sim\bullet q\rightarrow\bullet p)$ jest formuła: $(\bullet p\rightarrow\sim q)\rightarrow(\sim q\rightarrow p)$.

Obecnie pokażemy, że rachunek *R*• posiada skończoną matrycę charakterystyczną, która interpretuje funktory: $\sim, \wedge, \vee, \leftrightarrow$ w sposób klasyczny.

Niech $\mathfrak{R} = \langle\{a, b, a, d\}, \{d\}, f_{\sim} f_{\wedge}, f_{\vee}, f_{\rightarrow}, f_{\leftrightarrow}, f_{\bullet}\rangle$ będzie matrycą języka *J.* (to znaczy, że algebra $\langle\{a, b, c, d\}, f_{\sim}, f_{\wedge}, f_{\vee}, f_{\rightarrow}, f_{\leftrightarrow}, f_{\bullet}\rangle$ jest podobna do algebry *J.*), której operacje są charakteryzowane tabelami:

x	$f_{\sim}(x)$	$f_{\bullet}(x)$
d	d	a
b	c	c
c	b	b
d	a	d

$f_\wedge\ (x, y)$

x \ y	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	b	a	b
c	a	a	c	c
d	a	b	c	d

$f_\vee\ (x, y)$

x \ y	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	b	d	d
c	c	d	c	d
d	d	d	d	d

$f_\rightarrow (x, y)$

x \ y	a	b	c	d
a	d	d	d	d
b	c	d	c	d
c	b	b	d	d
d	a	b	c	d

$f_\leftrightarrow (x, y)$

x \ y	a	b	c	d
a	d	c	b	d
b	c	d	b	b
c	b	b	d	c
d	a	b	c	d

Wartościowaniem zmiennych zdaniowych języka $J_\bullet$ nazywamy dowolną funkcję $e: V \rightarrow \{a, b, c, d\}$. Każdą funkcję wartościowania e można przedłużyć jednoznacznie do homomorfizmu $h^e: J_\bullet \rightarrow \mathfrak{R}$ w taki sposób, że:

1) $h_e(p_i) = e(p_i)$ dla wszystkich zmiennych zdaniowych p_i;
2) $h^e(\sim \alpha) = f_\sim (h^e(\alpha))$;
3) $h^e(\alpha \wedge \beta) = f_\wedge (h^e(\alpha), h^e(\beta))$;
4) $h^e(\alpha \vee \beta) = f_\vee (h^e(\alpha), h^e(\beta))$;
5) $h^e(\alpha \rightarrow \beta) = f_\rightarrow (h^e(\alpha), h^e(\beta))$;
6) $h^e(\alpha \leftrightarrow \beta) = f_\leftrightarrow (h^e(\alpha), h^e(\beta))$;
7) $h^e(\bullet\, \alpha) = f_\bullet (h^e(\alpha))$ dla dowolnych $\alpha, \beta \in F_\bullet$.

Teraz pokażemy, że $\mathfrak{R}$ jest adekwatną matrycą dla zbioru tez rachunku $\boldsymbol{R}\bullet$, prezentując szkic dowodu następującego twierdzenia:

Dla każdej formuły α języka $J_\bullet$:
α jest teą rachunku $\boldsymbol{R}\bullet$ wtedy i tylko wtedy, gdy α jest $\bullet$-tautologią.

Każda teza rachunku $\boldsymbol{R}\bullet$ jest $\bullet$-tautologią, gdyż — co czytelnik może sprawdzić samodzielnie — wszystkie aksjomaty rachunku są $\bullet$-tautologiami, a reguły RO, R nie wyprowadzają poza zbiór $\bullet$-tautologii. Również zachodzi zależność odwrotna, tzn. każda $\bullet$-tautologia jest tezą rachubku $\boldsymbol{R}\bullet$. Aby tego dowieść, wprowadzimy pojęcie postaci normalnej koniunkcyjno-alternatywnej dla formuł języka J. Przyjmujemy mianowicie, że α występuje w postaci normalnej koniunkcyjno-alternatywnej wtedy i tylko wtedy, gdy jest koniunkcją alternatyw formuł postaci: "p_i", "$\sim p_i$", "$\bullet p_i$", lub "$\sim \bullet p_i$". Wykażemy, że zachodzi następujący:

Lemat.

Każda formuła α języka J. o koniunkcyjno-alternatywnej postaci normalnej jest $\bullet$-tautologią wtedy i tylko wtedy, gdy w każdej alternatywie będącej członem koniunkcji α występuje co najmniej jeden człon φ raz ze znakiem negacji, a raz bez.

Dowód lematu:

Każda koniunkcja $\alpha_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n$ języka J. jest $\bullet$-tautologią wtedy i tylko wtedy, gdy każdy jej człon α_i jest $\bullet$-tautologią. Przeto wystarczy badać dowolny ustalony człon α_i czyli formuła postaci:

$p \vee \ldots \vee \sim q \vee \ldots \vee \bullet r \vee \ldots \vee \sim \bullet s \vee \ldots$

1. Załóżmy, że w α_1 występuje podformuła postaci $\varphi \vee \sim \varphi$. Wówcas, co łatwo sprawdzić, dla kadego wartościowania e: $h^e(\alpha_i) = d$..

2. Załóżmy, że żadna z par postaci $(p_i, \sim p_i)$, $(\bullet p_i, \sim \bullet p_i)$ nie występuje w α_i. O ile w α_1 występuje zmienna zdaniowa p_i, to mogą zajść następujące przypadki:

a) w α_i występuje p_i i nie występuje żadna z pozostałych formuł;
b) w α_i wystepuje $\sim p_i$ i nie występuje żadna z pozostałych formuł;
c) w α_i występuje $\bullet p_i$ i nie występuje żadna z pozostałych formuł;
d) w α_i występuje $\sim \bullet p_i$ i nie występuje żadna z pozostałych formuł;
e) w α_i występują p_i i $\bullet p_i$ i nie występuje żadna z pozostałych formuł;
f) w α_i występują p_i i $\sim \bullet p_i$ i nie występuje żadna z pozostałych formuł;
g) w α_i występują $\sim p_i$ i $\bullet p_i$ i nie występuje żadna z pozostałych formuł;
h) w α_i występują $\sim p_i$ i $\sim \bullet p_i$ i nie występuje żadna z pozostałych formuł.

Teraz wystarczy określić wartościowanie e w taki sposób, że:

$$e(p_i) = \left\| \begin{array}{l} a \text{ w przypadkach: a), b), c), e), h),} \\ d \text{ w przypadku: d)} \\ b \text{ w przypadku: f)} \\ c \text{ w przypadku: g)} \end{array} \right.$$

by mieć pewność, że $h^e(\alpha_i) \neq d$.

Oznacza to, że α_i nie jest $\bullet$-tautologią. To kończy dowód lematu.

Zauważmy teraz, że dla dowolnej formuły a języka J. istnieje formuła α^* tego języka o komunikacyjno-alternatywnej postaci normalnej taka, że $(\alpha \leftrightarrow \alpha^*)$ jest tezą $\boldsymbol{R}\bullet$. Wynika to z tego, że dla każdej formuły α istnieje formuła unormowana α' taka, że $(\alpha \leftrightarrow \alpha')$ jest tezą $\boldsymbol{R}\bullet$. Równoważność α' z formułą α^* o koniunkcyjno-alternatywnej postaci normalnej na gruncie rachunku $\boldsymbol{R}\bullet$ wynika z praw klasycznego rachunku zdań, na którym $\boldsymbol{R}\bullet$ jest oparty.

Załóżmy teraz, że α jest $\bullet$-tautologią. Wobec powyższego istnieje formuła α' o koniunkcyjno-alternatywnej postaci normalnej taka, że $(\alpha \leftrightarrow \alpha')$ jest tezą $\boldsymbol{R}\bullet$. Jako taka jest też $(\alpha \leftrightarrow \alpha')$ $\bullet$-tautologią. Ponieważ α jest z założenia $\bullet$-tautologią, to i α' jest $\bullet$-tautologią, co łatwo wywnioskować z definicji $\bullet$-tautologii oraz matrycowej charakterystyki $f_{\leftrightarrow}$. Z lematu można zaś wywnioskować, że α' jest też tezą $\boldsymbol{R}\bullet$, bowiem α' zawiera w każdym członie α'_i koniunkcji, którą stanowi, podformułę postaci $\varphi \vee \sim \varphi$, będącą tezą R•. Ponieważ $(\alpha \leftrightarrow \alpha')$ i α' są tezami ***R•***, to i α jest tezą ***R•***. To kończy dowód twierdzenia.

Czterowartościowa matryca $\mathfrak{R}$ nadaje spójnikom: $\sim, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$, znaczenie klasyczne. Jest to widoczne, gdy zauważymy, że matryca $\mathfrak{R}' = \langle\{a, b, c, d\}, \{d\}, f_\wedge, f_\vee, f_\rightarrow, f_\leftrightarrow\rangle$ jest izomorficzna z produktem $\mathfrak{R}_2{}^2$ dwuwartościowej matrycy $\mathfrak{R}_2$ charakterystycznej dla ***KRZ***. Izomorfizm matryc $\mathfrak{R}'$ i $\mathfrak{R}_2{}^2$ ustala funkcja ε taka, że:

$\varepsilon(a) = \langle 0, 0 \rangle$;
$\varepsilon(b) = \langle 0, 1 \rangle$;
$\varepsilon(c) = \langle 1, 0 \rangle$;
$\varepsilon(d) = \langle 1, 1 \rangle$.

Z teorii matryc logicznych wiadomo, że zawartość dowolnej matrycy (zbiór tautologii względem tej matrycy) jest równa zawartości kwadratu kartezjańskiego tej matrycy. Wobec tego zbiór •-tautologii ograniczonej do formuł języka *J*. w których nie występuje spójnik •, pokrywa się ze zbiorem tautologii ***KRZ***, a spójniki: $\sim, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$, zachowują w ***R•*** znaczenie klasyczne.

Odtwarzalność *Ł3* w *R•*

W ***R•*** jest odtwarzalny trójwartościowy rachunek zdań ***Ł3***. By to wykazać przyjmijmy definicje:

$$\sim_3 \alpha \underset{def}{\equiv} \sim \alpha$$

$$(\alpha \rightarrow_3 \beta) \underset{def}{\equiv} \bullet \sim \alpha \vee \beta \vee (\sim \alpha \wedge \bullet\beta)$$

$$(\alpha \wedge_3 \beta) \underset{def}{\equiv} (\alpha \rightarrow_3 \beta) \rightarrow_3 \beta$$

$$(\alpha \wedge \beta) \underset{def}{\equiv} \sim \alpha \vee_3 \sim \beta)$$

$$(\alpha \leftrightarrow_3 \beta) \underset{def}{\equiv} (\alpha \rightarrow_3 \beta) \wedge_3 (\beta \rightarrow_3 \alpha).$$

Definicje te ustalają następującą charakterystykę matrycową spójników:

$\sim_3, \rightarrow_3, \vee_3, \wedge_3, \leftrightarrow_3$:

x	$f_{\sim 3}(x)$
a	d
b	c
c	b
d	a

$f_{\rightarrow 3}(x, y)$

x \ y	a	b	c	d
a	d	d	d	d
b	b	d	d	d
c	c	d	d	d
d	a	b	c	d

$f_{\vee 3}(x, y)$

x \ y	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	b	c	d
c	c	b	c	d
d	d	d	d	d

$f_{\wedge 3}(x, y)$

x \ y	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	b	c	d
c	a	b	c	c
d	a	b	c	d

$f_{\leftrightarrow 3}(x, y)$

x \ y	a	b	c	d
a	d	b	c	a
b	b	d	d	b
c	c	d	d	c
d	a	b	c	d

Jest widoczne, że matryca
$\mathfrak{R}^* = \langle\{a, b, c, d\}, \{d\}, f_{\sim 3}, f_{\rightarrow 3}, f_{\vee 3}, f_{\wedge 3}, f_{\leftrightarrow 3}\rangle$ jest homomorficzna z matrycą $\mathfrak{R}_3$ charakterystyczną dla rachunku *Ł3*. Homomorfizm $\mathfrak{R}^* \rightarrow \mathfrak{R}_3$ ustala funkcja h taka, że:

$$h(a) = 0$$
$$h(b) = h(c) = \frac{1}{2}$$
$$h(d) = 1.$$

Z teorii matryc logicznych wiadomo, że jeżeli dwie matryce są homomorficne, to ich zawartości są identyczne. Stosując to twierdzenie do naszego przypadku otrzymujemy wniosek, że $\mathfrak{R}^*$ i $\mathfrak{R}_3$ generują ten sam zbiór tez logicznych. Rachunek zdaniowy *Ł3* jest więc odtwarzany w ***R•***. Można sprawdzić, że wszystkie aksjomaty oraz reguły inferencji określające *Ł3* są wyprowadzalne w naszym rachunku ***R•***.

Wszystko, co jest wyrażalne na gruncie Ł3, jest też wyrażalne na gruncie ***R•***, rachunku, w którym podstawowe spójniki logiczne są rozumiane klasycznie. Żadna zmiana logiki „od podstaw" nie jest potrzebna do tego, by można wyrazić to, co jest wyrażalne na gruncie trójwartościowej logiki Jana Łukasiewicza.

LITERATURA

[1] Arystoteles: *Kategorie. Hermeneutyka.* Warszawa 1975.

[2] T. Kotarbiński: *Zagadnienie istnienia przyszłości. Przegląd filozoficzny.* Warszawa 1913.

[3] J. Łukasiewicz: *O determinizmie.* W: *Z zagadnień logiki i filozofii.* Warszawa 1961.

[4] J. Wajszczyk: *Problem wartości logicznej zdań dotyczących niezdeterminowanej przysłości a semantyczna definicja prawdy* (w przygotowaniu).