EDUKACJA FILOZOFICZNA
Vol. 18 1994

JÓZEF WAJSZCZYK
Wyższa Szkoła Pedagogiczna w Olsztynie

TEMPORALNA INTERPRETACJA „AND NEXT" G. H. von WRIGHTA

I. UWAGI WSTĘPNE

Jednym z najstarszych tematów logiczno-filozoficznych jest zagadnienie czasowo rozumianej modalności, oraz wiążący się z nim problem logicznych aspektów opisu zmiany. Analizy logiczno-temporalne znane są przynajmniej od czasów szkoły megarejskiej (nie wspominając o wcześniejszych głośnych paradoksach zmiany formułowanych przez Eleatów), a prowadzone były również przez stoików oraz w średniowieczu przez filozofów arabskich czy niektórych scholastyków. Do tych analiz nawiązywało wielu współczesnych logików, poczynając od A. N. Priora, który — inspirowany rozumowaniem megarejczyka Diodora Chronosa — stworzył pierwsze systemy tzw. logiki temporalnej. W różnych systemach logiki zdań temporalnych, formalizujących rozumowania zawierające niektóre wypowiedzi czasowe, występują głównie takie funktory zdaniotwórcze od jednego argumentu zdaniowego jak: „zawsze będzie tak, że.." (G), „kiedyś będzie tak, że.." (F), „zawsze było tak, że.." (H) oraz „kiedyś było tak, że.." (P). Warto zwrócić uwagę na to, że wszystkie te (zrelatywizowane do teraźniejszości) funktory odnoszą się do „całej przyszłości" czy „całej przeszłości". Niejako na uboczu tego nurtu badań sytuuje się system logiczny G. H. von Wrighta zwany „And next". W pochodzącej z 1963 roku pracy *Norm and Action* G. H. von Wright przedstawił szkic systemu formalnego zwanego *Logic of change*. Zawarte w tym szkicu intuicje dają podstawę do dokładniejszej charakterystyki tego rachunku zdaniowego metodą postaci normalnych. W 1965 roku, w artykule pt. *„And next"*, G. H. von Wright przedstawił metodą aksjomatyczną system rachunku zdań zwany tam „And next". System ten jest precyzacją intuicji zawartych w *Norm and Action*. „And next" jest rachunkiem zdaniowym nadbudowanym nad klasycznym rachunkiem zdań, którego specyficznym funktorem pierwotnym jest dwuargumentowy funktor T wyposażony w następującą zamierzoną interpretację: wyrażenie $\alpha T \beta$ rozumiane jest jako: „teraz α a następnie β". Warto zauważyć, że funktor T tym różni się od funktorów logik temporalnych (G, F), że odnosi się nie do „całej", lecz tylko do „bezpośredniej" przyszłości czasu teraźniejszego. Celem tego artykułu jest przedstawienie pewnej adekwatnej matrycy dla rachunku „And next", dzięki której uzyskuje on pewną temporalną interpretację.

II a. JĘZYK RACHUNKU „AND NEXT"

Na alfabet języka rachunku (oznaczonego odtąd przez J_{AN}), składają się symbole zmiennych zdaniowych (*p, q, r,..*), symbole klasycznych stałych logicznych ($\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$) ,symbol specyficznej stałej „a następnie" (T), oraz znaki pomocnicze. Język J_{AN} będziemy utożsamiali ze zbiorem wyrażeń poprawnie zbudowanych. Ponieważ von Wright nie dopuszczał w języku swojego rachunku wielokrotnych połączeń typu $\alpha T(\beta T\gamma)$ czy $(\alpha T\beta)T\gamma$, definicję języka J_{AN} poprzedzimy definicją zbioru tzw. pseudowyrażeń języka.

Def. 1.

Zbiorem **P** pseudowyrażeń języka J_{AN} nazywamy mniejszy ze zbiorów *P* takich, że:

1° $p, q, r, s... \in P$,

2° jeżeli $\alpha, \beta \in$ **P** to: "$\sim\alpha$", "$\alpha \wedge \beta$", "$\alpha \vee \beta$", "$\alpha \rightarrow \beta$", "$\alpha \leftrightarrow \beta$" $\in P$.

Za pomocą zbioru **P** definiujemy następne zbiory wyrażeń języka J_{AN}.

Def. 2.

Zbiorem **W** wyrażeń języka J_{AN} nazywany najmniejszy ze zbiorów *W* takich, że:

1° jeżeli $\alpha \in$ **P** to $\alpha \in W$,

2° jeżeli $\alpha, \beta \in$ **P** to "α T β" $\in W$,

3° jeżeli a, b $\in$ W to: "$\sim\alpha$", "$\alpha \wedge \beta$", "$\alpha \vee \beta$", "$\alpha \rightarrow \beta$", "$\alpha \leftrightarrow \beta$", $\in W$.

Na mocy powyższej definicji argumentami funktota T mogą być tylko wyrażenia, w których sam ten funktor nie występuje (pseudowyrażenia). Co za tym idzie, do zbioru wyrażeń języka J_{AN} nie należą np. ciągi symboli:

"$p\mathrm{T}(q\mathrm{T}r)$", "$((p \vee q)\,\mathrm{T}\,(q \wedge r))\,\mathrm{T} \sim s$" itp.

Wyrażeniami rozważanego języka są natomiast::

"$(p\,\mathrm{T} \sim p) \rightarrow (\sim q\,\mathrm{T}\,q)$", "$(p \vee \sim q) \wedge ((p \rightarrow q)\,\mathrm{T}\,(\sim p \wedge r))$" itp.

II b. AKSJOMATYCZNE OKREŚLENIE RACHUNKU „AND NEXT"

Aksjomatami rachunku „And next" są:

1. Wszystkie wyrażenia tego rachunku będące podstawieniami dowolnych praw klasycznego rachunku zdań w języku J_{AN}.

2. Specyficzne aksjomaty charakteryzujące funktor T. W tej grupie aksjomatów aksjomatami są wszystkie wyrażenia stanowiące uszczegółowienia następujących schematów aksjomatów:

Ax. 1. $[(\alpha \vee \beta)\,\mathrm{T}\,(\gamma \vee \delta] \leftrightarrow [(\alpha\,\mathrm{T}\,\gamma) \vee (\alpha\,\mathrm{T}\,\delta) \vee (\beta\,\mathrm{T}\,\gamma) \vee (\beta\,\mathrm{T}\,\delta)]$,

Ax. 2. $[(\alpha \wedge \beta)\,\mathrm{T}\,(\gamma \wedge \delta)] \leftrightarrow [(\alpha\,\mathrm{T}\,\gamma) \vee (\beta\,\mathrm{T}\,\delta)]$,

Ax. 3. $\alpha \leftrightarrow [\alpha\,\mathrm{T}\,(\beta \vee \sim\beta)]$,

Ax. 4. $\sim [\alpha\,\mathrm{T}\,(\beta \wedge \sim\beta)]$,

gdzie $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ są zmiennymi metajęzykowymi oznaczającymi dowolne pseudowyrażenia. Specyficznymi regułami inferencji w „And next" są:

R1: $$\frac{\vdash (\alpha \leftrightarrow \beta)}{\vdash [(\alpha\,\mathrm{T}\,\gamma) \leftrightarrow (\beta\,\mathrm{T}\,\gamma)],}$$

R2 $$\frac{\vdash (\beta \leftrightarrow \gamma)}{\vdash [(\alpha\,\mathrm{T}\,\beta) \leftrightarrow (\alpha\,\mathrm{T}\,\gamma)].}$$

Obecnie wykażemy, że rachunek „And next" jest dedukcyjnie równoważny pewnemu rachunkowi posiadającemu prostszą formalizację. Ten nowy rachunek, który będziemy od tego miejsca oznaczali przez **N**, jest nadbudowanym nad klasycznym rachunkiem zdań systemem o jednym specyficznym funktorze jednoargumentowym („Następnie...").

III. AKSJOMATYCZNE OKREŚLENIE RACHUNKU N

Scharakteryzujemy najpierw język omawianego rachunku (J_N).

Def. 3.

Zbiorem $\mathbf{W_N}$ wyrażeń języka J_N nazywamy najmniejszy ze zbiorów N takich, że:

1° jeżeli $\alpha \in \mathbf{P}$ to $\alpha \in N$,

2° jeżeli $\alpha \in \mathbf{P}$ to "$\rhd \alpha$" $\in N$,

3° jeżeli $\alpha, \beta \in N$ to: "$\sim \beta$", "$\alpha \wedge \beta$", "$\alpha \vee \beta$", "$\alpha \rightarrow \beta$", "$\alpha \leftrightarrow \beta$" $\in N$.

Aksjomatami rachunku **N** są:

1° Wszystkie wyrażenia języka J_N będące podstawieniami dowolnych praw klasycznego rachunku zdań w języku J_N.

2° Specyficzne aksjomaty charakteryzujące funktor $\rhd$, którymi są uszczegółowienia następujących schematów aksjomatów:

A1. $\rhd(\alpha \vee \sim \alpha)$,

A2. $\rhd(\sim \alpha) \leftrightarrow \sim \rhd \alpha$,

A3. $\rhd(\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow (\rhd\alpha \wedge \rhd\beta)$.

Specyficzną regułą inferencji w **N** jest:

$$R: \frac{\vdash (\alpha \leftrightarrow \beta)}{\vdash (\rhd \alpha \leftrightarrow \rhd \beta)}$$

Oto wybrane tezy rachunku **N**:

T1. $\rhd(\alpha \vee \beta) \leftrightarrow (\rhd\alpha \vee \rhd\beta)$.

T2. $\rhd(\alpha \rightarrow \beta) \leftrightarrow (\rhd\alpha \rightarrow \rhd \beta)$.

T3. $\rhd(\alpha \leftrightarrow \beta) \leftrightarrow (\rhd\alpha \leftrightarrow \rhd\beta)$.

IV. RÓWNOWAŻNOŚĆ DEDUKCYJNA SYSTEMÓW „AND NEXT" I N

Aby wykazać, że oba rachunki zdaniowe są sobie równoważne, należy udowodnić, że każdy z tych rachunków jest dedukcyjnie inferowalny w ramach rachunku drugiego. W tym celu należy pokazać, że: 1) Specyficzna stała logiczna jednego rachunku jest definiowana w drugim rachunku; 2) Wszystkie specyficzne aksjomaty rachunku są tezami rachunku drugiego oraz że 3) Specyficzne reguły pierwotne inferencji jednego rachunku są regułami wtórnymi w rachunku drugim. Zauważmy, że w rachunku **N** można zdefiniować funktar T w następujący sposób:

(D 1) $\alpha \mathrm{T} \beta \overset{=}{\underset{\mathrm{def}}{=}} (\alpha \wedge \rhd \beta)$

Przyjmując tę definicję można udowodnić, że wszystkie aksjomaty Ax 1 — Ax 4 są tezami w **N**.

Pokażemy to na przykładzie Ax2. Dowód:

1. $[(\alpha \wedge \beta) \mathrm{T} (\gamma \wedge \delta)] \leftrightarrow [(\alpha \wedge \beta) \wedge \rhd (\gamma \wedge \beta)]$ D1
2. $\rhd(\gamma \wedge \delta) \leftrightarrow (\rhd \gamma \wedge \rhd \delta)$ (A3)
3. $[(\alpha \wedge \beta) \mathrm{T} (\gamma \wedge \delta)] \leftrightarrow [\alpha \wedge \beta \wedge \rhd \gamma \wedge \rhd \delta]$ (1, 2, k. r. z.)
4. $[(\alpha \wedge \beta) \mathrm{T} (\gamma \wedge \delta)] \leftrightarrow [(\alpha \mathrm{T} \gamma) \wedge (\beta \mathrm{T} \delta)]$ (3, D1, k. r. z.) c. b. d. o.

Również reguły R1, R2 są wtórnymi regułami inferencji w **N**, co pokażemy na przykładzie R1.

Dowód:

1. $\vdash (\alpha \leftrightarrow \beta)$ (zał.)
2. $\vdash [(\alpha \wedge \rhd \gamma)) \leftrightarrow (\beta \wedge \rhd \gamma)]$ (1, k. r. z.)
3. $\vdash [\alpha \mathrm{T} \gamma) \leftrightarrow (\beta \mathrm{T} \gamma)]$ (2, D1, k. r. z.) c. b. d. o.

Funktor $\rhd$ jest definiowany w „And next" w następujący sposób:

(D2) $\rhd \alpha \overset{=}{\underset{\mathrm{def}}{=}} [(\beta \vee \sim \beta) \mathrm{T} \alpha]$.

Przyjmując tę definicję można udowodnić, że tezami rachunku „And next" są A1, A2 oraz A3. Oto przykładowy dowód A1:

1. $(\beta \vee \sim \beta)$ (k. r. z.)
2. $(\alpha \vee \sim \beta) \leftrightarrow [(\beta \vee \sim \beta) \mathrm{T} (\alpha \vee \sim \alpha)]$ (A x 3)
3. $(\beta \vee \beta) \mathrm{T} (\alpha \vee \sim \alpha)$ (1, 2, k. r. z.)
4. $\rhd(\alpha \vee \sim \alpha)$ (3, D2) c. b. d. o.

Reguła R jest wtórną regułą inferencji w „And next".

Dowód:

1. $\vdash (\alpha \leftrightarrow \beta)$ (zał.)
2. $\vdash \{[(\gamma \vee \sim \gamma) \mathrm{T} \alpha] \leftrightarrow [(\gamma \vee \sim \gamma) \mathrm{T} \beta]\}$ (1, R2)
3. $\vdash (\rhd \alpha \leftrightarrow \rhd \beta)$ (2, D2, k. r. z.) c. b. d. o.

W ten sposób zostało wykazane, że rachunek „And next" oraz rachunek **N** są sobie równoważne dedukcyjnie.

V. ISTNIENIE ADEKWATNEJ MATRYCY DLA RACHUNKU N

Rozważmy teraz matrycę $M = < A, A^{*}, f\sim, f\wedge, f\vee, f\rightarrow, f\leftrightarrow, f\rhd >$
gdzie $A = \{< x, y >: x, y \in \{0, 1\}\} = \{< 0, 0 >, < 0, 1 >, < 1, 0 >, < 1, 1 >\}$,
$A^{*} = \{< 1, 1 >\}$,
$f\sim (< x, y >) = < 1 - x, 1 - y >$,
$f\wedge (< x, y >, < x', y' > = < \min [x, x'], \min [y, y'] >$,
$f\vee (< x, y >, < x', y' >) = < \max [x, x'], \max [y, y'] >$,
$f\rightarrow (a, b) = f \vee (f \sim (a), b)$,
$f\leftrightarrow (a, b) = f \wedge (f \rightarrow (a, b), f \rightarrow (a, b))$,
$f\rhd (< x, y >) = < y, y >$.

Określamy zwyczajowo funkcję v zwaną wartościowaniem wyrażeń języka J_N w matrycy **M**. Wartościowaniem wyrażeń języka J_N w matrycy **M** nazywamy dowoln funkcję v: $J_N \rightarrow A$ taką, że dla dowolnych $\alpha, \beta \in J_N$:

$v(\sim\alpha) = f\sim(v(\alpha))$,
$v(\alpha \wedge \beta) = f\wedge(v(\alpha), v(\beta))$,
$v(\alpha \vee \beta) = f\vee(v(\alpha), v(\beta))$,
$v(\alpha \rightarrow \beta) = f\rightarrow(v(\alpha), v(\beta))$,
$v(\alpha \leftrightarrow \beta) = f\leftrightarrow(v(\alpha), v(\beta))$,
$v(\triangleright\alpha) = f\triangleright(v(\alpha))$.

Jeżeli wartością pewnej funkcji v od pewnego wyrażenia α jest układ $< 1, 1 >$, wówczas powiemy, że wyrażenie to jest niezmiennie prawdziwe. Wyrażenia języka J_N niezmiennie prawdziwe przy dowolnych wartościowaniach w matrycy **M** będziemy nazywali N-tautologiami i oznaczali symbolem $\models_N$ α fakt, że α jest N-tautologią. Inaczej:

Def. 4. $\models_N \alpha \overset{=}{_{def}} \bigwedge_v (v(\alpha) = < 1, 1 >)$.

Natomiast fakt, że pewne wyrażenie $\alpha \in W_N$ jest tezą rachunku N będziemy oznaczać przez $\vdash_N \alpha$.

Przechodzimy obecnie do wykązania, że rachunek „And next‹ posiada adekwatną matrycę logiczną. Wobec równoważności rachunków N oraz „And next" zadanie nasze będzie polegało na wykazaniu, że **M** jest adekwatną matrycą względem N, innymi słowy na stwierdzeniu identyczności zbioru N-tautologii i zbioru tez rachunku N (symbolicznie: $\{\alpha : \vdash_N \alpha\} = \{\alpha : \models_N a\}$). Dowód odpowiedniego twierdzenia przeprowadza się dwuczęściowo, dowodząc najpierw, że każda teza rachunku N jest N-tautologią, a następnie, że każda N-tautologia jest tezą rachunku. W artykule tym przedstawiamu jedynie szkic dowodu omawianego twierdzenia odnotowując tylko prowadzące doń lematy. Dokładny dowód twierdzenia zawiera wzmiankowana publikacja. Pierwszą część omawianej zależności wyraża

Twierdzenie 1. Dla dowolnego $\alpha \in W_N$: jeżeli $\vdash_N \alpha$ to $\models_N \alpha$.

Dowód tego twierdzenia jest stosunkowo prosty (chociaż żmydny) i polega na sprawdzeniu, że wszystkie aksjomaty N są N-tautologiami (co istotnie ma miejsce), oraz na wykazaniu, że reguła R nie wyprowadza poza zbiór tautologii. Drugą część twierdzenia o pełności wyraża

Twierdzenie 2. Dla dowolnego $\alpha \in W_N$: jeżeli $\models_N \alpha$ to $\vdash_N \alpha$.

W dowodzie tego twierdzenia wykorzystuje się następyjące lematy pomocnicze:

Lemat 1. Dla dowolnych $\alpha, \beta \in W_N$: jeżeli $\vdash_N (\alpha \leftrightarrow \beta)$ i $\vdash_N \alpha$ to $\vdash_N \beta$.

Lemat 2. Dla dowolnych $\alpha, \beta \in W_N$: jeżeli $\vdash_N (\alpha \leftrightarrow \beta)$ i $\models_N \alpha$ to $\models_N \beta$.

W dalszych trzech lematach posługujemy się pojęciem koniunkcyjno-alternatywnej postaci normalnej dla wyrażeń języka J_N. Powiemy, że wyrażenie α występuje w koniunkcyjno-alternatywnej postaci normalnej, gdy jest identyczne z koniunkcją pewnej ilości członów, z których każdy jest alternatywą wyrażeń atomicznych lub ich negacji, gdzie przez wyrażenie atomiczne rozumiemy wszystkie wyrażenia postaci: "p", "q", "r"... oraz "$\triangleright p$", "$\triangleright q$", "$\triangleright r$" ...i tylko te wyrażenia. Zbiór wszystkich wyrażeń języka występujących w koniunkcyjno-alternatywnej postaci normalnej oznaczamy przez KA (J_N). Oto kolejne lematy:

Lemat 3. Dla każdego $\alpha \in W_N$ istnieje $\alpha' \in$ KA (J_N) takie, że $\vdash_N (\alpha \leftrightarrow \alpha')$.

Lemat 4. Dla dowolnego $\alpha \in$ KA (J_N) : $\vdash_N \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy w każdej alternatywie składającej się na koniunkcję α występuje jakieś wyrażenie atomiczne raz ze znakiem negacji, a raz bez niego.

Lemat 5. Dla dowolnego $\alpha \in$ KA (J_N) : jeżeli $\models_N \alpha$ to $\vdash_N \alpha$.

W oparciu o powyższe lematy łatwo dowodzi się twierdzenie 2. Założeniem twierdzenia jest, że $\models_N \alpha$. Z tego oraz z lematu 3. wynika, że istnieje $\alpha' \in$ KA (J_N) takie, że $\vdash_N (\alpha \leftrightarrow \alpha')$. Z tego zaś, oraz z założenia, że $\models_N \alpha$ i Lemant 2. wynika, że $\models_N \alpha'$. Ponieważ $\alpha' \in$ KA (J_N), to na mocy Lematu 5. otrzymujemy, że $\vdash_N \alpha'$. Ponieważ zaś $\vdash_N (\alpha \leftrightarrow \alpha')$, to — na mocy Lematu 1. : $\vdash_N \alpha$. c. b. d. o. Twierdzenie 1. w połączeniu z twierdzeniem 2. dają pożądane twierdzenie o pełności, czyli:

Twierdzenie 3. Dla dowolnego $\alpha \in W_N$: $\vdash_N \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\models_N \alpha$.

Biorąc zaś pod uwagę wcześniej wykazaną równoważność rachunków N i „And next", otrzymujemy następujący wynik:

Twierdzenie 4. Adekwatną matrycę względem rachunku „And next" jest układ $\mathbf{U} = \langle A, A^*, f_\sim, f_\wedge, f_\vee, f_\rightarrow, f_\leftrightarrow, f_T \rangle$, gdzie $A, A^*, f_\sim, f_\wedge, f_\vee, f_\rightarrow, f_\leftrightarrow$ są określone jak dla matrycy **M**, zaś dla dowolnych $\langle x, y \rangle, \langle x', y' \rangle \in A$:

$$f_T(\langle x, y \rangle, \langle x', y' \rangle) = \langle \min[x, y'], \min[x', y'] \rangle .$$

Funkcję f_T określa także tabelka:

	$f_T(a,b)$			
a \ b	< 0, 0 >	< 1, 0 >	< 0, 1 >	< 1, 1 >
< 0, 0 >	< 0, 0 >	< 0, 0 >	< 0, 0 >	< 0, 0 >
< 1, 0 >	< 0, 0 >	< 0, 0 >	< 1, 0 >	< 1, 0 >
< 0, 1 >	< 0, 0 >	< 0, 0 >	< 0, 1 >	< 0, 1 >
< 1, 1 >	< 0, 0 >	< 0, 0 >	< 1, 1 >	< 1, 1 >

VI. TEMPORALNA INTERPRETACJA „AND NEXT"

Dzięki temu, że **M** jest matrycą adekwatną względem N, a U — względem „And next", rachunkom tym można nadać następującą temporalną interpretację, Wartości $< x, y >$ z uniwersum A interpretujemy jako pary klasycznych wartości logicznych odpowiednich zdań. Przyjmujemy, że wartość logiczna zdania α równa jest $< x_o, y_o >$ ($v(\alpha) = < x_o, y_o >$) wtedy i tylko wtedy, gdy klasyczna wartość logiczna zdania „teraz α " wynosi x_0, a klasyczna wartość logiczna zdania „następnie α " wynosi y_o. Interpretację taką można przyjąć, jeżeli w metasystemie przyjmiemy następujące założenia dotyczące czasu oraz sposobu zmienności stanów rzeczy w czasie:

Z 1. Czas jest uporządkowaną strukturą relacyjną $<$ **T**, $< >$, gdzie **T** jest zbiorem „momentów czasowych", zaś $<$ określoną na tym zbiorze relacją binarną wcześniej — później, która jest asymetryczna, przechodnia i spójna w zbiorze T, oraz porządkuje go w sposób gęsty i bez elementu pierwszego i ostatniego.

Z 2. Dla każdego $\alpha \in$ P oraz dla każdego t $\in$ **T** istnieje (choćby dowolnie małe) prawostronne sąsiedztwo („bezpośrednia przyszłość" — „następnie"), w którym stan rzeczy opisywany przez α jest niezmienny.

Założenie Z 2. pozwala na przypoorządkowanie każdemu α oraz każdemu momentowi t (który może stać się teraźniejszością) układu $< \{ t \}, n(t) >$, na który składają się komponenty „teraz" oraz „następnie" (nieskończenie małe prawostronne sąsiedztwo t), w których klasyczna wartość logiczna α jest stała[1].

[1] Rozszerzona postać tez zawartych w niniejszym artykule znajduje się w pracy *An adequate matrix for the „And next" calculus of G. H. von Wright*, „Bulletin of the Section of Logic", vol. 23, number 2, *Łódź 1994*.