EDUKACJA FILOZOFICZNA
Vol. 3 1987



*HORST WESSEL*

# UWAGI O NIE-TRADYCYJNEJ TEORII ORZEKANIA*

## I. WPROWADZENIE

Nietradycyjna teoria orzekania została przedstawiona w wielu monografiach [1]. U źródeł tej teorii znajdują się dwa podstawowe przekonania:

1. Założenie o pre-logicznej umiejętności człowieka odróżnienia dwóch rodzajów terminów: terminów oznaczających *(Subjekttermini),* oraz terminów określających *(Pradikattermini);*
2. Założenie, że nie każda własność jest określona dla dowolnego rodzaju przedmiotów tzn. że nie każda własność przysługuje lub nie przysługuje dowolnemu rodzajowi przedmiotów, gdyż może być dla danego rodzaju przedmiotów nieokreślona.

Dla przedstawienia pewnych uwag dotyczących tej teorii wprowadzimy najpierw niezbędne notacje i oznaczenia, a mianowicie: Zdania stwierdzające. że przedmiot s posiada własność P, bądź, że przedmioty: $s_1$, $s_2$,..., $s_n$ pozostają do siebie w relacji R zapisywać będziemy odpowiednio przy pomocy następujących schematów:

$$s \leftarrow p \text{ oraz } s_{1;}\ s_2,\ldots\ s_n \leftarrow R$$

gdzie litery: s, $s_1$, $s_2$,..., $s_n$ reprezentują dowolne nazwy indywiduowe, a litery: P, R reprezentują jedno lub n-argumentowe predykaty, natomiast symbol ← reprezentuje odpowiednio zwroty: „... jest... ”,„... ma... ”, „... są w relacji... ” i nazywać go będziemy operatorem predykacji.
Analogicznie zdania typu:

s nie jest P

bądź też:

$s_1$ $s_2$,..., $s_n$ nie są w relacji R.

* Horst Wessel jest profesorem logiki, kierownikiem Zakładu Logiki Uniwersytetu im. Humboldta w Berlinie. Artykuł ten był referowany przez autora na zebraniu Zakładu Logiki Instytutu Filozofii Uniwersytetu Warszawskiego w dn. 3 maja 1984 r. (red. ).

[1] Por.: A. Sinowiew, H. Wessel: *Logische Sprachregeln.* Berlin 1975; II Vessel: *Logik und Philosophic.* Berlin 1976; Idem: *Logik.* Berlin 1984.

reprezentować będziemy kolejno przez schematy:

$$s \leftrightarrow\!\!\!\!+ P \text{ oraz } s_1, s_2, \ldots, s_n \leftrightarrow\!\!\!\!+ R$$

gdzie symbol „↮" reprezentuje odpowiednio zwroty: „...nie jest...", „...nie są...".

W klasycznej a także intuicjonistycznej logice wyrażenia o schemacie s↮P utożsamia się z wyrażeniami reprezentowanymi przez schemat: $\sim (s \leftarrow P)$ gdzie „$\sim$" jest symbolem klasycznej bądź intuicjonistycznej negacji. Według nie-tradycyjnej teorii orzekania podejście takie nie zawsze jest trafne. W teorii tej zakłada się bowiem, że zdania typu:

$$s \leftarrow P \quad \text{oraz} \quad s \leftrightarrow\!\!\!\!+ P$$

nie zawsze wyczerpują wszystkie możliwości, co ma chociażby miejsce w następujących przypadkach:

a) Wtedy gdy własność P nie jest określona dla tego typu przedmiotów jakim jest przedmiot s. Zachodzi wtedy zarówno $\sim (s \leftarrow P)$ jak i również $\sim$ (s ↮ P), jak na przykład w zdaniach:

Nieprawda, że Księżyc jest uczciwy,
Nieprawda, że Księżyc nie jest uczciwy.

b) Jeżeli rozsądne użycie zdań o schematach $s \leftarrow P$ lub s ↮ P zakłada prawdziwość innego zdania, np. zdanie: „N przestał palić" zakłada prawdziwość zdania „N kiedyś palił".

c) Jeżeli jest zasadniczo niemożliwe stwierdzić, czy $s \leftarrow P$, czy s ↮ P

d) Jeżeli nie istnieje obiekt oznaczony przez s, wtedy również

$$\sim (s \leftarrow P) \quad \text{oraz} \quad \sim (s \leftrightarrow\!\!\!\!+ P)$$

W wymienionych przypadkach mimo, że powód nieokreśloności jest różny, to z logicznego punktu widzenia mamy do czynienia z podobną sytuacją: polegającą na tym, że oprócz przypisywania przedmiotowi danej własności, lub też zaprzeczania posiadania przez przedmiot tej własności, mamy również do czynienia z przypadkami nieokreśloności, kiedy to posiadanie danej własności przez pewien przedmiot nie jest ani stwierdzane, ani też zaprzeczane. Z przypadkami nieokreśloności spotykamy się w praktyce językowej i dlatego powinniśmy brać je pod uwagę w logicznej teorii predykacji. Zarysujemy teraz zarówno wersję semantyczną jak i aksjomatyczną tej teorii. Od razu zaznaczmy, że teoria ta okazała się pomocna dla rozwiązania pewnych filozoficznych paradoksów, jak na przykład paradoksów ruchu i zmiany oraz dla wyjaśnienia powodów, dla których w intuicjonistycznej logice odrzuca się niektóre z praw klasycznej logiki.

## II. SEMANTYCZNE REGUŁY I AKSJOMATYKA NIETRADYCYJNEJ TEORII PREDYKACJI

Klasyczną negację $\sim$ nazywać będziemy zewnętrzną negacją, dla podkreślenia tego, że odnosi się bądź do całego zdania, bądź też do formy zdaniowej, a nie do operatora predykatywności. Dla sformułowania semantycznych reguł obowiązujących w nietradycyjnej teorii predykacji przyjmujemy następujące notacje: zamiast $s \leftarrow P$ pisać będziemy P(s) lub krótko p. a w miejsce $s \leftrightarrow P$, będziemy pisać $\urcorner$Ps lub krótko $\urcorner$p. Znak $\urcorner$ nazywać będziemy symbolem wewnętrznej negacji, dla podkreślenia, że negacja ta odnosi się do operatora predykatywności. Zdania P(s) i $\urcorner$ P(s) nazywać będziemy przeciwnymi. W słowniku otwartego języka nie-tradycyjnej teorii predykacji w szczególności występują klasyczne spójniki: $\sim$ (negacja), $\wedge$ (koniunkcja), $\vee$ (alternatywa), $\Rightarrow$ (implikcja), $\Leftrightarrow$ (równoważność), oraz spójnik wewnętrznej negacji $\urcorner$.

Niech Z będzie zbiorem wszystkich formuł języka rozważanej przez nas teorii. Dowolne formuły ze zbioru Z oznaczać bdziemy literami: A, B,,, Symbolami: 1, 0 oznaczać będziemy wartości logiczne odpowiednio prawdy i fałszu. Funkcję przyporządkującą formułom zdaniowym ze zbioru Z wartości logiczne określamy jako dowolną funkcję:

$$v: Z \mapsto \{0,1\}$$

spełniającą następujące cztery warunki:

W1) jeżeli A jest formułą atomową to v (A) = 0, lub 1. Funkcja v w przypadku formuł atomowych określona jest tak jak w klasycznym rachunku zdań dla zmiennych zdaniowych,

W2) jeżeli A jest formułą zbudowaną z formuł atomowych przy pomocy spójników klasycznych to v (A) jest określona zgodnie z regułami semantycznymi dla klasycznego rachunku zdań,

W3) jeżeli v (A) = 1 to v ($\urcorner$A) = 0

W4) jeżeli v (A) = 0 to v ($\urcorner$A) = 0 lub 1, czyli wartość v ($\urcorner$A) nie jest wyznaczona przez wartość logiczną formuły A.

Aksjomatyka systemu nie-tradycyjnej teorii predykacji powstaje przez dodanie do aksjomatów klasycznej logiki dla otwartego języka rachunku predykatów następującego schematu aksjomatów:

$$(P(a) \wedge \urcorner P(a))$$

gdzie a jest zmienną nazwową lub ciągiem n zmiennych nazwowych, zaś P jest literą reprezentującą jedno lub n-argumentowy predykat. Aksjomatyczny system nie-tradycyjnej teorii predykacji jest niesprzeczny i pełny tzn. wszystkie schematy wyłącznie prawdziwych zdań są twierdzeniami tego systemu [2].

[2] H. Wessel: *Vollständigkeit der nichttraditionellen Prädikationstheorie.* „Deutsche Zeitschrift für Philosophie" 1982, nr 11.

## III. NIE-TRADYCYJNA TEORIA ORZEKANIA A INTUICJONISTYCZNY RACHUNEK ZDAŃ

W literaturze filozoficznej znaleźć można wiele wątpliwości natury filozoficznej i logicznej dotyczących intuicjonistycznej koncepcji logiki. Przedstawimy teraz niektóre z nich. Pierwsza wątpliwość o charakterze filozoficznym dotyczy relacji zachodzących między myśleniem a językiem. Według intuicjonistów myślenie może odbywać się niezależnie od wszelkiego języka. Myśli, a w szczególności idee matematyczne mogą być wyrażone w języku tylko w niepełny sposób. Dyskusja i krytyka tych wątpliwości jest przeprowadzona m.in. w pracy *Logik und Philosophie* [3]. Druga filozoficzna obiekcja skeroiwana przeciw intuicjonizmowi dotyczy zasięgu logicznych reguł wnioskowania. Według intuicjonistów zasięg logicznych praw i reguł wnioskowania zależy od tego, czy dziedzina, której wnioskowanie dotyczy jest skończona czy nieskończona. Według intuicjonistów niektóre prawa logiki klasycznej tracą swą ważność gdy rozumowanie dotyczy dziedzin nieskończonych. Trzecia filozoficzna wątpliwość dotyczy stosunku logiki do matematyki. Intuicjoniści traktują logikę jako część matematyki, a nie jako dyscyplinę logicznie od niej wcześniejszą. Według intuicjonistów podstawowe konstrukcje i pojęcia matematyczne (jak na przykład pojęcie *liczba naturalna*) są prostsze niż pojęcia logiczne.

Przejdziemy obecnie do wyliczenia logicznych obiekcji dotyczących logiki intuicjonistycznej. Pierwsza wątpliwość natury logicznej dotycząca logiki intuicjonistycznej pochodzi od Kurta G ö d l a. G ö d e l wykazał, że logikę intuicjonistyczną można traktować jako zawierającą ukrytą logikę epistemiczną [4]. Pewne uwagi na ten temat można znaleźć też w pracy P. Nowikowa [5]. W pracach tych przedstawione są również pewne obiekcje dotyczące interpretacji intuicjonistycznej implikacji. W naszym artykule skoncentrujemy się jedynie na problemach związanych z intuicjonistyczną negacją. Nieformalna analiza przykładów podanych w pracy L. E. J. Brouwera [6] prowadzi do wniosku, że intuicjonistyczna krytyka nie dotyczy klasycznego prawa wyłączonego środka $A \vee \sim A$ tylko skierowana jest przeciw prawu $A \vee \neg A$. Formuła $A \vee \neg A$ nie jest wyprowadzalna również w nietradycyjnej teorii predykacji. In-

[3] Idem: *Logik und....*, op. cit.

[4] K. G ö d e l: *Aine Interpretation des intuitionistischen Aussagekalküls.* „Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums" 1933, nr 4.

[5] Ibidem; P. N o v i k o v: *Konstruktivnaja matematičeskaja logika a točki zrenija klassičeskoj.* Moskva 1977.

[6] L. E. J. B r o u w e r: *Collected Works.* Vol 1: *Philosophy and Foundations of Mathematics.* Amsterdam—New York—Oxford 1975.

tuicjoniści niesłusznie identyfikują schemat: $s \nleftrightarrow P$ ze schematem $\sim (s \leftrightarrow P)$ i odrzucają prawo $A \vee \sim A$. Dla porównania intuicjonistycznego rachunku zdań z językiem nie-tradycyjnej teorii predykacji przyjmiemy następujące oznaczenia:

Litery: $-$, $.$, $+$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, będą intuicjonistycznymi spójnikami kolejno negacji, koniunkcji, alternatywy, implikacji i równoważności. Przez Fm oznaczamy zbiór wszystkich formuł zdaniowych intuicjonistycznego rachunku zdań, a przez INT zbiór formuł będących twierdzeniami logicznymi tego rachunku.

Przez S oznaczamy zbiór wszystkich formuł klasycznego rachunku zdań a przez KRZ zbiór twierdzeń logicznych tego rachunku. Analogicznie przez $S^+$ oznaczamy zbiór wszystkich formuł języka nietradycyjnej teorii predykacji, a przez TP zbiór twierdzeń logicznych w tym języku. Ponadto przyjmiemy następujące dwie definicje:

**Definicja 1**

Formułę A języka klasycznego rachunku zdań nazywać będziemy klasyczną reprezentacją (skrótowo C-reprezentacją) formuły $A_0 \in Fm$ zawsze i tylko wtedy gdy formuła A powstaje z formuły $A_0$ przez zastąpienie intuicjonistycznych spójników przez klasyczne spójniki.

**Definicja 2**

Formułę $A^+$ należącą do zbioru $S^+$ nazywać będziemy P-reprezentacją formuły $A \in Fm$ gdy $A^+$ powstaje z formuły A przez zastąpienie przynajmniej jednej negacji znajdującej się bezpośrednio przed zmienną przez negację wewnętrzną i przez zastąpienie pozostałych spójników intuicjonistycznych przez odpowiadające im spójniki klasycznego rachunku zdań.

Zachodzi sześć następujących metatwierdzeń:

**Metatwierdzenie 1**

Istnieją formuły intuicjonistycznego rachunku zdań, niewyprowadzalne w intuicjonistycznym rachunku zdań, których C-reprezentacje są wyprowadzane w klasycznym rachunku zdań, oraz ich wszystkie P-reprezentacje są niewyprowadzalne w TP.

Przykładami takich formuł są:

$$-p+p; \qquad - -p \rightarrow p; \qquad (p \rightarrow q) \rightarrow (-p+q)$$

$$-(-p. -q) \rightarrow (p+q) \qquad -(p. -q) \rightarrow (p \rightarrow q) \qquad -(-p. -q) \rightarrow (p+q)$$

Metatwierdzenie 1 sugeruje, iż w intuicjonizmie dlatego odrzuca się prawo wyłączonego środka, gdyż utożsamia się wewnętrzną negację z zewnętrzną negacją. Następne metatwierdzenia pokazują, że hipoteza ta nie jest w pełni prawdziwa.

**Metatwierdzenie 2**

Istnieją formuły, w języku intuicjonistycznego rachunku zdań, które są niewyprowadzalne w INT, takie, że ich C-reprezentacje są wyprowadzalne w KRZ, zaś ich pewne P-reprezentacje są wyprowadzalne w systemie nie-tradycyjnej teorii predykacji TP, zaś pewne z ich C-reprezentacji nie są wyprowadzalne w TP.

Dla przykładu następujące formuły:

$$(-p \rightarrow -q) \rightarrow (q \rightarrow p), \qquad -p + - -p$$

są niewyprowadzalne w INT, a w TP następujące ich P-reprezentacje są wyprowadzalne:

$$(\sim p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow (q \Rightarrow p), \qquad \neg p \vee \sim \neg p$$

a następujące formuły:

$$(\neg p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow (q \Rightarrow p), \qquad \neg p \vee \sim \sim p$$

są niewyprowdzalne.

**Metatwierdzenie 3**

Istnieją formuły, które są niewyprowadzalne w INT i których C-reprezentacje są wyprowadzalne w KRZ i których wszystkie P-reprezentacje są wyprowadzalne w TP.

Na przykład:

$$((p \rightarrow -q) \rightarrow p) \rightarrow p; \qquad p + (p \rightarrow -q)$$

**Metatwierdzenie 4**

Istnieją formuły, które są wyprowadzalne w INT i wszystkie ich P-reprezentacje są wyprowadzalne w TP.

Na przykład fomruły:

$$-p \rightarrow (p \rightarrow q), \qquad p \rightarrow - -p; \qquad -(p. -p)$$

**Metatwierdzenie 5**

Istnieją formuły które są wyprowadzalne w INT i pewne ich P-reprezentacje są wyprowadzalne w TP, a pewne nie.

Na przykład formuły:

$$(p \rightarrow -p) \rightarrow -p, \quad (p \rightarrow -q) \rightarrow (q \rightarrow -p), \qquad - - -p \rightarrow -p$$

są wyprowadzalne w INT, oraz formuły:

$$(p \Rightarrow \neg p) \Rightarrow \neg p, \quad (p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow (q \Rightarrow \sim p)$$

$$\sim \sim \neg p \Rightarrow \neg p$$

są wyprowadzalne w TP, a natomiast formuły:

$$(p \Rightarrow \sim p) \Rightarrow \neg p \quad \text{i} \quad (p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow (q \Rightarrow \neg p)$$

$$\sim \sim \sim p \Rightarrow \neg p$$

nie są wyprowadzalne w TP.

**Metatwierdzenie 6**

Istnieją formuły wyprowadzalne w INT takie, że wszystkie ich P-reprezentacje są niewyprowadzalne w TP.

Przykładami takich formuł są następujące formuły:

$$(p \leftrightarrow q) \rightarrow (\neg p \leftrightarrow \neg q), \quad -(p+q) \rightarrow (-p. -q), \quad --(p \vee -q)$$

Przedstawione tutaj metatwierdzenia pokazują, że intuicjonistyczna negacja jest pomieszaniem wewnętrznej i zewnętrznej negacji. W ramach nietradycyjnej teorii predykacji można z powodzeniem analizować i rozwiązywać niektóre z problemów wysuniętych przez twórców logiki intuicjonistycznej bez odrzucania klasycznej logiki.

Przedstawiona tutaj analiza intuicjonistycznej negacji odnosi się tylko do pewnych problemów intuicjonistycznej logiki, a nie pretenduje w żadnym wypadku do pomniejszania zasług intuicjonistycznej analizy matematyki.

Tłumaczył:
*Mieczysław Omyła*