ANNA WÓJTOWICZ
Uniwersytet Warszawski

ZWIĄZEK MIĘDZY PRZYJĘTĄ INTERPRETACJĄ POJĘCIA PRAWDOPODOBIEŃSTWA A BŁĘDAMI WE WNIOSKOWANIU*

*****PRACA POWSTAŁA W RAMACH GRANTU NARODOWE CENTRUM NAUKI 2012/05/B/HS1/01711

Uniwersalność pojęcia prawdopodobieństwa

Chcąc opisać zdarzenia, na temat których nie mamy pełnej wiedzy, mówimy, że wystąpią one z *pewnym prawdopodobieństwem*, że *istnieje szansa na ich wystąpienie* ale również, że *istnieje ryzyko, że nie nastąpią*. Jeśli nie jesteśmy czegoś całkowicie pewni – mówimy o *stopniach pewności*. Tak wyrażają swoje poglądy zwykli użytkownicy języka, ale również specjaliści: lekarze, ekonomiści, prawnicy, językoznawcy, kulturoznawcy i filozofowie. Pojęcie prawdopodobieństwa odgrywa istotną rolę w komunikacji codziennej, a także w teoriach naukowych, m.in. statystyce czy w teorii decyzji. Pozwala ilościowo opisywać związki przyczynowo-skutkowe, mierzyć stopień, w jakim hipotezy są wspierane przez dane empiryczne, oceniać racjonalność wyborów dokonywanych w warunkach niepewności. Paradoksalnie, ta uniwersalność terminu „prawdopodobieństwo” staje się źródłem problemów. Okazuje się bowiem, że pojęcie to może być różnie rozumiane. Analizując znaczenia zwrotów:

- *jest większa szansa na to, że sukces odniesie autor X niż autor Y;*
- *najbardziej prawdopodobny jest wariant, w którym dane przedsiębiorstwo zbankrutuje;*
- *jest bardzo mało prawdopodobne, że dane zjawisko kulturowe okaże się trwałe;*
- *palenie papierosów znacząco zwiększa ryzyko zachorowania na raka płuc;*
- *prawdopodobieństwo wystąpienia deszczu w ciągu najbliższej godziny wynosi 0,3;*

- *prawdopodobieństwo, że oskarżony popełnił zarzucany mu czynu graniczy z pewnością;*
- *prawdopodobieństwo, że stosowanie leku będzie miało skutki uboczne wzrosło o 100%.*

dochodzimy do wniosku, że termin „prawdopodobieństwo" (i jego synonimy) nie jest w nich tak samo interpretowany. Zwykły użytkownik języka, bombardowany informacjami zawierającymi termin „prawdopodobieństwo", zmuszony jest balansować między tymi różnymi znaczeniami, chcą wyciągnąć z przedstawianych przy jego użyciu danych racjonalne konkluzje. Niestety badania pokazują, że zwykle mu się to nie udaje. Istnieje cały katalog nieporozumień związanych z tym pojęciem i błędów w rozumowaniach opartych na przesłankach, w których ono występuje.

Intuicyjne i formalne rozumienie terminu „prawdopodobieństwo"

Potrzeba ustalania prawdopodobieństwa poszczególnych zdarzeń wzięła się z prostych gier losowych – np. takich, jak gra w kości. Ci, którzy umieli porównywać szanse na wypadnięcie pewnego układu oczek, wygrywali z tymi, którzy tego nie potrafili. Zapewne każdy intuicyjnie wie, że prawdopodobieństwo wyrzucenia szóstki wynosi 1/6, wyrzucenia parzystej lub nieparzystej liczby oczek – wynosi 1 (jest to zdarzenie pewne), a wyrzucenia jednocześnie trójki i dwójki – wynosi 0 (jest to zdarzenie niemożliwe). Nie do końca natomiast zdajemy sobie sprawę z tego, jaka jest zależność między prawdopodobieństwami poszczególnych zdarzeń (np. co jest bardziej prawdopodobne – wypadnięcie trzech szóstek pod rząd czy wypadnięcie sekwencji: jeden, cztery, trzy) i ogólnie z tego, jaką strukturę tworzą byty, którym przypisujemy prawdopodobieństwo. Te szczegóły reguluje jednoznacznie formalna definicja pojęcia prawdopodobieństwa, a nasze intuicje są często tylko niedokładnym jej odbiciem.

Z formalnego punktu widzenia, prawdopodobieństwo jest funkcją, która przypisuje elementom pewnego zbioru X wartości ze zbioru liczb rzeczywistych. O zbiorze X zakłada się, że ma on określoną strukturę:

- jeśli do zbioru X należy jakiś element A, to należy również element nie-A;
- jeśli do zbioru X należą dwa element A i B, to do X należy również ich suma: A lub B.

Zgodnie z pierwszym założeniem – jeśli możemy przypisać prawdopodobieństwo temu, że jakieś zdarzenie zajdzie, to możemy również przypisywać prawdopodobieństwo temu, że nie zajdzie, a zgodnie z drugim: jeśli możemy przypisać prawdopodobieństwa każdemu z dwóch zdarzeń osobno, to możemy również przypisać prawdopodobieństwo temu, że którekolwiek z nich zajdzie.

Na funkcję prawdopodobieństwa P nakłada się trzy warunki, które gwarantują, że prawdopodobieństwo jest liczbą z przedziału (0,1) i prawdopodobieństwo sumy elementów zbioru X, które się wzajemnie wykluczają, jest sumą prawdopodobieństw przypisanych tym elementom. Formalnie zapisujemy je następująco:

1) $0 \leq P(A) \leq 1$,
2) prawdopodobieństwo zdarzenia pewnego jest równe 1,
3) prawdopodobieństwo sumy dowolnych, parami wykluczających się zdarzeń A_1, A_2, ... jest równe sumie ich prawdopodobieństw:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots .$$

Mając funkcję prawdopodobieństwa można zdefiniować dodatkowo pojęcie *prawdopodobieństwa warunkowego*: prawdopodobieństwo tego, że zajdzie zdarzenie A, o ile wiemy, że zaszło zdarzenie B. Jest ono równe ilorazowi prawdopodobieństwa łącznego zajścia A i B, i prawdopodobieństwa zajścia B. Symbolicznie:

$P(A|B) = P(A \text{ i } B)/P(B)$.

Łatwo pokazać, że prawdziwa jest następująca równość (nazywana wzorem Bayesa):

$P(A|B) = [P(B|A)\ P(A)]/P(B)$.

Z matematycznego punktu widzenia charakterystyka funkcji prawdopodobieństwa i zbioru, do którego należą argumenty tej funkcji, nie budzi żadnych wątpliwości. Jest to jednak charakterystyka, która nic nie mówi o tym, **czym faktycznie są** elementy zbioru X i **czemu**, w związku z tym, **prawdopodobieństwo przypisujemy**. Ten problem rozstrzygają dopiero poza-formalne interpretacje pojęcia prawdopodobieństwa.

Interpretacje pojęcia prawdopodobieństwa

Ze względu na interesujący nas problem można wyróżnić cztery[1] główne typy takich interpretacji: *klasyczną, częstościową, skłonnościową i subiektywistyczną*. Wydaje się, że to właśnie przyjęcie określonej interpretacji pojęcia prawdopodobieństwa jako pojęcia wyjaśniającego i opisującego zjawiska z danej sfery (kultury, rozwoju języka, prawa, ekonomii, fizyki, medycyny, komunikacji) ma istotne skutki dla jego rozumienia i skutecznego użycia.

Zgodnie z *interpretacją klasyczną* prawdopodobieństwo zdarzenia A jest stosunkiem między liczbą zdarzeń, które sprzyjają A (w których A zachodzi), a liczbą wszystkich możliwych zdarzeń. Przy tej interpretacji zbiór X jest zawsze skończony i wszystkim jego elementom przypisujemy równe prawdopodobieństwo. Tak właśnie rozumiemy prawdopodobieństwo wylosowania pika z ze zwykłej 52 kartowej talii czy wyrzucenia szóstki rzetelną kostką. W tym ujęciu tylko bardzo szczególnym zdarzeniom można przypisywać prawdopodobieństwo. Na pewno nie da się go orzec (bez zrobienia całkowicie nierealistycznych założeń) o trendach kulturowych, zjawiskach atmosferycznych czy ludzkich zachowaniach.

Zgodnie z *interpretacją częstościową* – prawdopodobieństwo jest miarą częstości, z jaką dane zdarzenie występuje w klasie innych zdarzeń określonego typu. Przy tej interpretacji zbiór X jest zbiorem tylko takich zdarzeń, które są powtarzalne. Najprostszym przykładem zdarzenia powtarzalnego jest rzut rzetelną kostką do gry. Taki rzut można powtórzyć wielokrotnie i ocenić, jakie jest prawdopodobieństwo wyrzucenia sześciu oczek. W tym ujęciu nie można jednak przypisać prawdopodobieństwa zdarzeniom jednostkowym, unikalnym – np. temu, że pewien konkretny Jan Kowalski popełni w czasie najbliższego tygodnia morderstwo, albo, że pewna konkretna sztuka teatralna odniesie sukces.

[1] Świadomie rezygnujemy tu z mówienia o interpretacji logicznej pojęcia prawdopodobieństwa, ponieważ nic nie wnosi ona do problemu poruszanego w niniejszym artykule.

Takie zdarzenia przy interpretacji częstościowej nie należą do zbioru X. W efekcie ograniczona jest np. możliwość opisu w kategoriach prawdopodobieństwa (szans, ryzyka) zjawisk kulturowych czy unikalnych zdarzeń fizycznych.

Zgodnie z *interpretacja skłonnościową* – prawdopodobieństwo jest miarą skłonności (tendencji czy dyspozycji) danego układu do zajścia określonego stanu tego układu (por. np. [Załuski 2008]). Przy tej interpretacji zbiór X jest zbiorem stanów danego układu. Przyjmując taką interpretację możemy próbować ocenić, jakie jest prawdopodobieństwo tego, że Jan Kowalski podejmie próbę samobójczą, zastanawiając się, jaki jest jego aktualny stan psychiczny i co wiemy na temat jego psychiki (np. jego skłonności do działań autodestrukcyjnych). Możemy również prognozować, jaka jest szansa na to, że obecnej sytuacji politycznej wybory na prezydenta wygra taki a nie inny polityk, albo, że spośród kandydatów zgłoszonych do nagrody literackiej zwycięży kandydat A. Pozwala ona również w określonym układzie fizycznym, składającym się z pojedynczej cząstki i dwóch szczeliny, obliczyć (na podstawie znanych praw fizyki) prawdopodobieństwo, że cząstka przeleci przez pierwszą z tych szczelin. W tym ujęciu nie możemy jednak oceniać prawdopodobieństwa stanów, które nie są wcale (lub są tylko luźno) powiązane z innymi stanami układu, lub które są zdarzeniami w jakimś sensie izolowanymi. Nie możemy np. ocenić prawdopodobieństwa tego, że stara moneta, którą znaleźliśmy w skrzyni jest monetą rzetelną (a więc, że prawdopodobieństwo wyrzucenia orła i reszki jest takie samo i wynosi 0,5).

Zgodnie z *interpretacją subiektywistyczną* – prawdopodobieństwo jest miarą naszych przekonań co do tego, że dane zdarzenie zajdzie (albo w innej konwencji – że będzie prawdziwe zdanie opisujące zajście tego zdarzenia). Jest więc wyrazem subiektywnej oceny tego, jaka jest szansa, że dane zjawisko nastąpi, jakie jest ryzyko zaistnienia splotu okoliczności itp. Przy tej interpretacji zbiór X jest zbiorem dowolnych zdarzeń czy stanów układu. Jedyny warunek, jaki nakładamy na tak interpretowaną funkcję prawdopodobieństwa to jej zgodność z wymienionymi wcześniej aksjomatami.

Różnice w interpretacji prawdopodobieństwa mają dalsze konsekwencje.

Zakres stosowalności pojęcia prawdopodobieństwa

O ile w ujęciu subiektywistycznym prawdopodobieństwo można przypisać przekonaniu dotyczącemu zajścia dowolnego zdarzenia, stanu czy zjawiska, to pozostałe interpretacje są zdecydowanie bardziej restrykcyjne. W ujęciu klasycznym zdarzenia muszą tworzyć pewien bardzo prosty, skończony i regularny układ. W ujęciu częstościowym o prawdopodobieństwie zdarzenia można mówić tylko wtedy, gdy jest ono powtarzalne, i gdy możemy wyróżnić grupę zdarzeń stanowiących jego odniesienie (prawdopodobieństwo jest względną częstością zdarzenia danego typu w takiej grupie). W ujęciu skłonnościowym, aby jakiemuś stanowi układu przypisać prawdopodobieństwo, musi on być powiązany (np. przyczynowo-skutkowo, choć mówi się również o jakimś innym, „metafizycznym" związku) z innymi stanami tego układu. W efekcie np. zdarzeniom jednostkowym (niepowtarzalnym, w jakimś sensie unikalnym czy izolowanym) można przypisać prawdopodobieństwo tylko w sensie subiektywistycznym, a tylko w szczególnych wypadkach – skłonnościowym. Trudno też w niektórych przypadkach przypisać prawdopodobieństwo (w interpretacji częstościowej czy skłonnościowej) hipotezom ogólnym (np. temu, że wszystkie kruki są czarne). A to z kolei istotnie ogranicza stosowanie wzoru Bayesa. Jeśli bowiem chcemy stwierdzić, jakie jest prawdopodobieństwo prawdziwości hipotezy A, o ile wiemy, że zaszło pewne zdarzenie B (czyli obliczyć prawdopodobieństwo tej hipotezy *a posteriori* – symbolicznie: P(A|B)), musimy we wzorze posłużyć się prawdopodobieństwem samej hipotezy A (prawdopodobieństwem *a priori* – symbolicznie: P(A)). O ile jednak zdarzenie A nie należy do klasy X, na której funkcja prawdopodobieństwa jest określona – jest to zadanie niewykonalne

Status stwierdzeń odwołujący się do pojęcia prawdopodobieństwa

W ujęciu klasycznym, częstościowym i skłonnościowym prawdopodobieństwo wydaje się własnością obiektywną zdarzeń lub stanów. Można powiedzieć nieco metaforycznie, że tkwi w samej rzeczywistości i jest niezależne od tego, czy ktoś posiada wiedzę na ten temat. W ujęciu subiektywistycznym – jest tylko wyrazem przekonania racjonalnego podmiotu na temat prawdziwości zdania opisującego zdarzenie. Racjonalność podmiotu objawia się tu tym, że zachowuje się on w pewien sposób konsekwentnie – modyfikuje swoje przekonania zgodnie z regułą warunkowania. Jej działanie można przedstawić w następujący sposób. Załóżmy, że mamy w danej chwili *t* przekonanie, że prawdopodobieństwo zdarzenia A wynosi $P_t(A)$. W chwili *t'* (późniejszej od *t*) uzyskaliśmy wiedzę, że zaszło zdarzenie B. Jak wpływa to na nasze przekonanie na temat prawdopodobieństwa zdarzenia A, tzn. jaką wartość powinno mieć $P_{t'}(A)$? Zmodyfikowane, „nowe" prawdopodobieństwo przypisywane zdarzeniu A powinno – po uzyskaniu wiedzy, że zaszło zdarzenie B – zmienić się w „stare" prawdopodobieństwo warunkowe. Innymi słowy – przy założeniu, że modyfikujemy przekonanie w oparciu o wiedzę na temat zajścia zdarzenia B – reguła ta ma postać:

$$P_{t'}(A) = P_t(A \mid B).$$

W celu zwiększenia czytelności (nie trzeba pamiętać, że chwila *t* jest wcześniejsza od *t'*) zasadę tę zapisuje się też następująco:

$$P_{nowe}(A) = P_{stare}(A \mid B).$$

Aby zapewnić interpretowanemu subiektywistycznie prawdopodobieństwu walor obiektywności należałoby traktować je jako przekonania eksperta w danej dziedzinie lub sprowadzać – o ile jest to możliwe – do innego rozumienia prawdopodobieństwa. Znajduje to wyraz np. w postępowaniach sądowych, gdzie przede wszystkim szuka się obiektywnej informacji na temat prawdopodobieństwa zajścia danego zdarzenia (dostarczonej np. przez roczniki statystyczne), a jeśli taka nie istnieje, powołuje się eksperta, i traktuje się jego przekonanie na temat tego prawdopodobieństwa jako stwierdzenie obiektywnego stanu rzeczy.

Ilościowe versus jakościowe opisywanie prawdopodobieństwa

Z formalnego punktu widzenia, prawdopodobieństwo jakiegoś zdarzenia (stopień przekonania o prawdziwości jakiegoś zdania) jest liczbą z przedziału (0,1). Jeśli umiemy przypisać danemu zdarzeniu A określone (wyrażone liczbowo) prawdopodobieństwo, możemy następnie wykonać na tej wielkości różne operacje: obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego (czyli 1 – P(A)), obliczyć niektóre prawdopodobieństwa warunkowe itd. Skąd jednak wiadomo, ile dokładnie prawdopodobieństwo zdarzenia A wynosi? Na takie pytanie łatwiej odpowiedzieć przyjmując interpretację klasyczną czy częstościową, niż interpretację subiektywistyczną lub skłonnościową pojęcia prawdopodobieństwa. Przy interpretacji subiektywistycznej możemy np. mówić, że jest *bardzo wysokie prawdopodobieństwo, że zajdzie A* albo, że *szanse na zajście A i B są takie same*, wyrażając tym samym nasze przekonania, że P(A) jest bliskie 1, i P(A) = P(B). Do pewnych celów tego typu stwierdzenia wystarczą, ale w niektórych przypadkach może być konieczne ich doprecyzowanie. Jeśli np. sędzia wydając wyrok chce realizować maksymę cesarza Trajana „lepiej uniewinnić 100 winnych niż skazać jednego niewinnego”, to tym samym musi – przynajmniej w założeniu – móc liczbowo oszacować prawdopodobieństwo tego, że oskarżony jest faktycznie winny, jako nie mniejsze niż 99/100. Podobnie, jeśli zamierzamy dokonać racjonalnego wyboru między różnymi towarzystwami ubezpieczeniowymi, powinniśmy umieć ocenić, czy stosunek między proponowaną składką a kwotą ubezpieczenia jest dla nas (subiektywnie) korzystny, biorąc pod uwagę prawdopodobieństwo zdarzenia, które jest przedmiotem ubezpieczenia. Powinniśmy umieć przełożyć np. naszą awersję do ryzyka, przekonanie o prześladującym nas pechu i potrzebę komfortu na wartości liczbowe i dokonać obliczeń. Towarzystwa ubezpieczeniowe czerpią swoje dochody z różnicy między naszym subiektywistycznie interpretowanym prawdopodobieństwem i prawdopodobieństwem częstościowym, na temat którego dane dostarczają im roczniki statystyczne i wysoko opłacani eksperci.

Podsumowanie

Najważniejszymi własnościami, które różnicują poszczególne interpretacje pojęcia prawdopodobieństwa są:

- Status twierdzeń, w których pojęcie prawdopodobieństwa występuje (ich obiektywność *vs* subiektywność);

- Zakres stosowalności pojęcia prawdopodobieństwa (uniwersalne *vs* ograniczone do dziedziny o ściśle określonych cechach);
- Sposób szacowania wielkości prawdopodobieństwa (ilościowe *vs* jakościowe).

Wśród wymienionych interpretacji pojęcia prawdopodobieństwa najlepiej scharakteryzowane pod tymi względami są interpretacje subiektywistyczna i częstościowa. To one reprezentują do pewnego stopnia przeciwstawne podejścia do problemu, czym jest prawdopodobieństwo. Pozostałe interpretacje mają bądź dość specyficzny, wąski zasięg – jak np. klasyczna – bądź niezbyt dobrze sprecyzowane własności – jak skłonnościowa. Można też twierdzić, że są one właściwie szczególnymi przypadkami interpretacji częstościowej i subiektywistycznej[2].

Przewaga interpretacji częstościowej (czasami nazywanej też statystyczną) nad interpretacją subiektywistyczną polega na tym, że wydaje się dostarczać ona obiektywnej wiedzy. Prawdopodobieństwo zdarzenia jest przy niej zawsze wyrażone liczbowo, a uzyskane ustalenia traktuje się jako prawdy o świecie. Z drugiej jednak strony interpretacja częstościowa stosuje się do zdecydowanie węższej klasy zdarzeń – takich, które są powtarzalne, dla których można precyzyjnie ustalić grupę odniesienia.

Zaletą interpretacji subiektywistycznej (nazywanej też bayesowską) jest jej szerokie zastosowanie. Dzięki temu możemy posługiwać się wzorem Bayesa, a to pozwala nam podać przepis na racjonalne modyfikowanie naszych przekonań w obliczu uzyskanych nowych informacji – czyli posługiwać się regułą warunkowania. Chociaż szacowanie tak rozumianego prawdopodobieństwa ma często postać jakościową – ustala się, które zdarzenia wydają się nam bardziej prawdopodobne, a nie ile wynosi ich prawdopodobieństwo – do celów praktycznych (np. podejmowania decyzji życiowych) jest w zasadzie wystarczające.

---

[2] Interpretacja klasyczna opiera się na częstości w skończonej, bardzo prostej dziedzinie, interpretacja skłonnościowa w wersji odwołującej się do skłonności układu fizycznego, rządzonego przez ścisłe prawa ma charakter obiektywny, a w wersji odwołującej się do skłonności układu rozumianej metafizycznie – charakter subiektywny.

Wybór między interpretacją subiektywistyczną a częstościową zależy od tego, która z wymienionych własności prawdopodobieństwa jest dla nas w danym momencie istotniejsza – czy zależy nam na szerokim, choć nie do końca precyzyjnym zastosowaniu czy na wąskim ale dokładnym.

Skoncentrujmy się więc na tych dwóch interpretacjach i pokażmy, jak odwołując się do ich własności możemy klasyfikować najczęściej występujące błędy w rozumowaniach, w których występuje pojęcie prawdopodobieństwa.

Niech X_{sub} i $X_{częst}$ oznaczają zbiory zdarzeń, których elementy są argumentami funkcji prawdopodobieństwa odpowiednio: zgodnie z interpretacją subiektywistyczną i zgodnie z interpretacją częstościową[3]. Wartościami funkcji P_{sub} i $P_{częst}$ (określonych na zbiorach X_{sub} i $X_{częst}$) są liczby z przedziału (0,1). Ponieważ na gruncie pierwszej interpretacji prawdopodobieństwo możemy przypisać dowolnemu zdarzeniu, a na gruncie drugiej tylko niektórym z nich, zależność między tymi zbiorami jest następująca[4]:

$X_{częst} \subseteq X_{sub}$.

Pojawiają się w związku z tym naturalnie dwa dobrze określone obszary działania funkcji prawdopodobieństwa: $(X_{sub} - X_{częst})$ i $(X_{sub} \cap X_{częst})$.

W **pierwszym** z nich prawdopodobieństwo zdarzeń może być szacowane wyłącznie subiektywistycznie. W **drugim** – prawdopodobieństwo zdarzeń może być szacowane zarówno częstościowo jak i subiektywistycznie. W obszarze pierwszym można też wyróżnić zbiór takich

---

[3] Zamiast o zbiorach zdarzeń można wymiennie mówić o zbiorach zdań opisujących te zdarzenia. Zbiory te są izomorficzne – tzn. mają dokładnie taką samą strukturę (łącznemu zajściu dwóch zdarzeń odpowiada prawdziwość koniunkcji dwóch zdań, sumie zdarzeń odpowiada alternatywa zdań, zdarzeniom wykluczającym się – para zdań, których koniunkcja jest fałszywa itd.). W literaturze przedmiotu występują oba sposoby charakterystyki zbioru będącego dziedziną funkcji prawdopodobieństwa. W niniejszej pracy też czasami będziemy stosować je zamiennie – o ile nie będzie to prowadzić do nieporozumień.

[4] Podobna zależność zachodzi oczywiście również między zbiorem X_{sub}, a zbiorami $X_{skł}$, X_{klas} czy X_{log} (będących odpowiednio zbiorami zdarzeń, którym przypisuje się prawdopodobieństwo na gruncie interpretacji skłonnościowej, klasycznej i logicznej), ponieważ zbiór X_{sub} jest zbiorem (potencjalnie) najszerszym.

zdarzeń, którym w sensie częstościowym wprawdzie nie można przypisać prawdopodobieństwa, ale które mogą być – również w rozumieniu częstościowym – argumentami funkcji opisującej prawdopodobieństwo warunkowe. Zilustrujmy to przykładem. Załóżmy, że znajdujemy na strychu monetę, o której nic pewnego nie możemy powiedzieć (nie potrafimy zidentyfikować ani jej pochodzenia, ani wieku). W związku z tym, nie ma sensu mówić, że istnieje w sensie częstościowym jakieś prawdopodobieństwo *a priori*, że moneta ta jest rzetelna (tzn. że prawdopodobieństwo wypadnięcia awersu jest takie samo jak wypadnięcie rewersu). Nie potrafimy bowiem wskazać żadnej rozsądnej grupy odniesienia dla tej monety. Możemy jednak obliczyć prawdopodobieństwo warunkowe: np. to, że 10 razy pod rząd wypadnie awers pod warunkiem, że moneta jest rzetelna. Takie obliczenie będzie miało sens zarówno dla zwolennika interpretacji subiektywistycznej jak i częstościowej. Zwolennicy tej ostatniej interpretacji będą mogli przypisać temu stwierdzeniu znaczenie częstościowe – ponieważ jest to prawdopobieństwa pewnego dobrze zdefiniowanego, powtarzalnego eksperymentu. Jest to więc obszar (nazwijmy go – **trzecim**), na którym dwie interpretacje mogą się ze sobą w pewien sposób mieszać. Zwolennik interpretacji częstościowej będzie umiał określić $P(B|A)$, nie umiejąc jednocześnie określić ani $P(A)$ ani $P(B)$, a więc w szczególności nie mogąc zastosować wzoru Bayesa, aby obliczyć $P(A|B)$.

Oczywiście taki opis, pokazujący obszary działania różnych interpretacji pojęcia prawdopodobieństwa i ich wzajemne przenikanie, jest dostępny tylko z pewnego punktu widzenia i najczęściej nie jest dany zwykłym użytkownikom języka. Stanowi jednak wygodną perspektywę badawczą, pozwalającą w nowy sposób ocenić racjonalność rozumowań odwołujących się do pojęcia prawdopodobieństwa.

Typowe problemy i błędy związane z pojęciem prawdopodobieństwa

W niektórych sytuacjach karą za niewłaściwe przypisanie prawdopodobieństwa zdarzeniom jest poniesienie jakiejś wymiernej straty. Wiedzą to słabi gracze w kości czy w pokera. Twierdzenie, że np. prawdopodobieństwo naszej śmierci (lub zapłacenia podatków) jest różne od 1 – a więc przyjmowanie, że zdarzenie pewne może nie nastąpić, czy przypisywanie niezerowego prawdopodobieństwa zdarzeniu niemożliwemu (niektórzy uważają, że jest to np. zrozumienie kobiety) również wcześniej czy później doprowadzi do niekorzystnych dla nas rozstrzygnięć.

Oczywiście nie zawsze zależności między niewłaściwym używaniem pojęcia prawdopodobieństwa a praktycznymi stratami są bezpośrednie czy oczywiste. Czasami trudno jest stwierdzić, dlaczego powinniśmy posługiwać się pojęciem prawdopodobieństwa tak, aby spełnione były aksjomaty rządzące jego formalną charakterystyką. Filozofowie próbowali ten problem rozwiązać, konstruując różnego typu argumenty, mające pokazać, że przynajmniej potencjalnie takie niewłaściwe postępowanie prowadzi do jakiś negatywnych efektów. Najbardziej znane są w tym kontekście różne wersje tzw. argumentu *Dutch Book*. Opierają się one na założeniu, że skoro przypisujemy jakiemuś zdarzeniu prawdopodobieństwo różne od zera, to zawsze da się wskazać stawkę, o jaką bylibyśmy się gotowi założyć, że zdarzenie to zajdzie. Niezależnie od pewnych słabych punktów tych rozumowań (por. [Joyce 1998], [Christensen 1991], [Christensen 1996], [Christensen 2001]) należy się zgodzić, że w określonych okolicznościach pogwałcenie formalnych reguł rządzących użyciem terminu „prawdopodobieństwo" jest nieracjonalne (nie pozwala zrealizować założonego celu, prowadzi do sprzeczności, skutkuje decyzjami dalekimi od optymalnych). Spróbujmy więc skatalogować typowe błędy, które są związane z pojęciem prawdopodobieństwa, czyli takie zachowania, które trzeba uznać za nieracjonalne.

Rozważmy wyróżniony wyżej pierwszy obszar działania funkcji prawdopodobieństwa. W jaki sposób zdefiniujemy błąd, jaki popełnia ktoś przypisując prawdopodobieństwo zdarzeniom, którym w sensie obiektywnym prawdopodobieństwa przypisać nie możemy? Ponieważ takie przypisanie jest wyrazem subiektywnego przekonania podmiotu, to można jedynie twierdzić, że jest ono wewnętrznie sprzeczne lub niekonsekwentne. Do najczęściej występujących w tym obszarze błędów należy:

1. Uznanie, że prawdopodobieństwo sumy zdarzeń logicznie dopełniających się nie jest równe 1;

2. Uznanie, że prawdopodobieństwo łącznego zajścia zdarzeń logicznie wykluczających się nie jest równe 0;
3. Uznanie, że prawdopodobieństwo łącznego zachodzenia dwóch zdarzeń jest większe niż prawdopodobieństwie zajścia jednego z nich;
4. Modyfikowanie przekonań niezgodne z zasadą warunkowania.

Zauważmy, że pierwsze dwa błędy nie oznaczają po prostu, że nie przypisujemy prawdopodobieństw 1 i 0 odpowiednio jakimś zdarzeniom pewnym lub niemożliwym, ale – że nie robimy tak dla zdarzeń **logicznie** pewnych lub niemożliwych. Nie zależy to w związku z tym od tego, co myślimy np. o śmierci, podatkach czy zrozumieniu kobiety, ale wyłącznie od konsekwentnego używania stałych logicznych. Popełnienie tych błędów będzie prowadzić do jakiś negatywnych skutków bo – rozumując w duchu argumentu *Dutch Book* – w pierwszym wypadku bylibyśmy gotowi postawić jakąś małą sumę, na to że żadne ze zdarzeń dopełniających się nie zajdzie, a w drugim – że zajdą oba zdarzenia wykluczające się. A tak oczywiście być nie może i na pewno stracimy nasz zakład.

Trzeci błąd – nazywany błędem koniunkcji – jest również pogwałceniem prawa wypływającego nie z obserwacji czy wiedzy na temat świata, ale będącego konsekwencją aksjomatów rządzących pojęciem prawdopodobieństwa. Dla dowolnych zdarzeń A i B mamy bowiem: $P(A \text{ i } B) \leq P(A)$, a więc nigdy nie będzie tak, że koniunkcja dwóch zdań odnosi się do zdarzenia bardziej prawdopodobnego niż jedno z tych zdań. Najbardziej znany przykład tego błędu opisał Kahneman i Tveski ([Tversky, Kahneman 1971]), przedstawiając wyniki zaprojektowanego przez siebie eksperymentu. Badanym (studentom i doktorantom) przedstawiono następujący problem:

> *Linda ma 31 lat, jest otwartą, inteligentną, i niezamężną kobietą. Ukończyła filozofię. Jako studentka poświęcała dużo czasu problemom sprawiedliwości społecznej i dyskryminacji, uczestniczyła też w demonstracjach antynuklearnych.*

Na tej podstawie mieli oni odpowiedzieć na pytanie, co jest bardziej prawdopodobne:

H1. *Linda pracuje w banku;*

H2. *Linda pracuje w banku i jest aktywną działaczką ruchu feministycznego.*

85% badanych wybrało jako bardziej prawdopodobną odpowiedź H2. Ponieważ H2 ma postać koniunkcji hipotezy H1 i zdania, że Linda jest aktywna działaczką ruchu feministycznego, jest to właśnie przypadek błędu koniunkcji.

Czwarty błąd jest związany z nieprzestrzeganiem zasady warunkowania. Należy przy tym zwrócić uwagę, że sama ta zasada nie wynika bezpośrednio z aksjomatów rachunku prawdopobieństwa, które dotyczą jedynie określonej funkcji prawdopobieństwa a nie zmiany jednej funkcji na inną (z P_{stare} na P_{nowe}) w obliczu uzyskanych informacji. Konieczność jej stosowania uzasadnia się za pomocą tzw. diachronicznego argumentu *Dutch Book* (por. np. [Lewis 1999]). Pokazuje on, że w określonych okolicznościach przyjęcie serii zakładów i nie modyfikowanie odpowiednio funkcji prawdopobieństwa w oparciu o uzyskiwaną wiedzę, prowadzi do straty materialnej.

Na szczególną uwagę zasługują tu dwa typy pogwałcenia tej zasady: błąd gracza (*gambler fallacy*) i błąd gorącej ręki (*hot hand fallacy*).

Pierwszy z nich polega na tym, że zdarzenia niezależne A i B traktuje się tak, jakby istniał między nimi jakiś związek, a więc jakby wiedza o tym, że zaszło zdarzenie A zmieniała prawdopodobieństwo zdarzenia B. Innymi słowy, chociaż faktycznie zawsze dla zdarzeń niezależnych A i B mamy:

$P(A \mid B) = P(A)$

uważa się, że

$P_{stare}(A) < P_{nowe}(A)$,

co stoi w sprzeczności z tym, że w tym wypadku:

$P_{nowe}(A) = P_{stare}(A \mid B) = P_{stare}(A)$.

Dobrym przykładem ilustrującym ten błąd jest zachowanie graczy przy grze w ruletkę. Mają oni tendencję po tym, jak kilka razy z rzędu wypadało czerwone pole, obstawiać w kolejnym rzucie czarne pole (po serii rzutów czerwonych długości 6, robiło tak ponad 80% graczy – por. [Croson, Sundali 2005]). Kolejny rzut kulką jest jednak niezależny od poprzednich, a więc właściwie zastosowana zasada warunkowania nie pozwala oceniać wypadnięcia czarnego pola jako bardziej prawdopodobnego niż wcześniej (zanim wypadło pod rząd kilka pól czerwonych).

Błąd gorącej ręki ma charakter w pewnym sensie odwrotny. Również dotyczy on zdarzeń niezależnych A i B, ale tym razem po informacji, że zaszło B, zdarzenie A traktuje się jako mniej prawdopodobne, a więc stwierdza się, że

$P_{stare}(A) > P_{nowe}(A)$,

mimo, iż

$P_{nowe}(A) = P_{stare}(A \mid B) = P_{stare}(A)$.

Zwykle jako przykład tego błędu podaje się zachowanie komentatorów sportowych i trenerów koszykówki. Chociaż statystycznie dobrzy gracze zdobywają mniej więcej tyle samo punktów w każdym meczu, graczowi, któremu udało się w danym spotkaniu trafić do kosza kilka razy z rzędu przypisuje się mniejszą szansę, że spudłuje przy kolejnym rzucie (i np. wyznacza się go do rzutów wolnych). Faktycznie jednak, te szanse się nie zmieniają.

Błędy pojawiające się w obszarze pierwszym działania funkcji prawdopodobieństwa są odpowiednikami błędów formalnych, które powstają, gdy staramy się wnioskować dedukcyjnie. Podobnie jak tam, uzyskany wniosek wcale nie musi być fałszywy. Jego wada polega na tym, że nie wynika z przesłanek – przypisanie zdarzeniu określonego prawdopodobieństwo nie wynika z wcześniejszych założeń (lub w niektórych przypadkach jest z nim po prostu sprzeczne). Warto zwrócić uwagę, że taka charakterystyka dotyczy wskazanych wyżej błędów gracza i gorącej ręki jedynie przy założeniu, że zdarzenia A i B są faktycznie niezależne i że osoba wnioskująca zdaje sobie z tego sprawę. Tylko wtedy bowiem można twierdzić, że zachowuje się nieracjonalnie. Jeśli natomiast uważa, że np. to, iż w danym rzucie wypadło czerwone wpływa jakoś (np. przyczynowo-skutkowo) na wynik kolejnego rzutu, popełnia się wyłącznie pewnego rodzaju błąd materialny – przypisuje danym zdarzeniom (do których odwołuje się w przesłankach rozumowania) prawdopodobieństwa inne niż mają one faktycznie.

Taka obserwacja prowadzi nas naturalnie do charakterystyki błędów pojawiających się, gdy mówimy o zdarzeniach należących do drugiego wyróżnionego wyżej obszaru, czyli takich, którym prawdopodobieństwo można przypisać zarówno w interpretacji częstościowej jak i subiektywistycznej. Najogólniej powstające tu błędy albo mają charakter formalny (czyli są takie, jak omówione dla obszaru pierwszego) albo polegają na rozbieżności w wartościach funkcji P_{sub} i $P_{częst}$. Są więc to błędy materialne bo zakładamy, że jeśli już jakiemuś zdarzeniu udało się przypisać prawdopodobieństwo w sensie częstościowym, to jest to przypisanie zgodne z prawdą[5] i co więcej, że intencją podmiotu formułującego tezy na temat wartości funkcji P_{sub} jest bycie tej prawdy jak najbliżej[6]. W tym obszarze można wyróżnić dwa zasadnicze typy tego rodzaju błędów: błędy związane ze złą oceną prawdopodobieństwa (niezgodność z danymi empirycznymi) i błędy związane ze złą interpretacją danych empirycznych. Wśród najczęściej spotykanych błędów tego pierwszego typu wyróżnia się:

5. Zawyżanie prawdopodobieństw zdarzeń obiektywnie rzadkich ale z jakiś powodów wyróżnionych (np. zawyżanie prawdopodobieństwa globalnej katastrofy, zawyżanie przekonania, że pewne objawy świadczą o – obiektywnie niezbyt częstej – chorobie);
6. Zaniżanie prawdopodobieństwa zdarzeń bardzo częstych (np. zaniżenia prawdopodobieństwa wypadku samochodowego w stosunku do prawdopodobieństwa katastrofy samolotowej);
7. Błędne identyfikowanie zdarzeń probabilistycznie niezależnych jako probabilistycznie zależnych.

---

[5] Oczywiście takie założenie można podważać. Zwolennicy subiektywnej interpretacji pojęcia prawdopodobieństwa twierdzą, że często przypisanie danemu zdarzeniu prawdopobieństwa częstościowego oparte jest na pewnych arbitralnych ustaleniach – np. wskazaniu grupy odniesienia, która stanowi podstawę do obliczeń. Jak np. oceniać prawdopobieństwa, że dana osoba zapadnie na pewną chorobę? Czy grupę odniesienia stanowią dla niej osoby o tej samej płci, czy należące do pewnego przedziału wiekowego, czy też narażone na działanie określonych czynników? Dyskusja na temat tych kontrowersji wykracza jednak poza ramy niniejszej pracy.

[6] Można uważać, że jeśli ktoś przypisuje funkcji P_{sub} pewne wartości, to jego intencją jest danie wyrazu swoim nadziejom, dążeniom czy świadomie irracjonalnym przekonaniom, ale w takim wypadku niema sensu zastanawiać się nad tym, jak należy oceniać wnioskowania, w których tak interpretowane pojęcie subiektywnego prawdopodobieństwa się pojawia. Nie da się bowiem zastosować do nich kategorii błędu materialnego.

Powyższe trzy typy błędów przypominają swoim charakterem złudzenia – chociaż stan faktyczny jest określony (np. wiadomo, jaka jest częstość katastrof lotniczych czy występowania danej choroby w populacji), z różnych powodów mamy problemy z „dostrzeżeniem" tych danych. Dobrym przykładem jest opisane przez Kahnemana i Tverskiego badanie (por.np. [Kahneman, Tversky 1996]), w którym prosi on uczestników eksperymentu o określenie, jakich wyrazów jest w języku angielskim więcej: takich, które zaczynają się na literę *k*, czy takich, gdzie litera *k* występuje na trzecim miejsc. Pytanie Kahnemana dotyczyło więc tego, jaki jest stosunek między $P_{częst}$(*k* na początku wyrazu) i $P_{częst}$(*k* na trzecim miejscu w wyrazie). Zdecydowana większość uznała, że więcej jest takich wyrazów, które zaczynają się na literę *k*, a więc dała wyraz temu, że:

P_{sub}(*k* na początku wyrazu) > P_{sub}(*k* na trzecim miejscu w wyrazie).

Stan faktyczny jest jednak odwrotny:

$P_{częst}$(*k* na początku wyrazu) < $P_{częst}$(*k* na trzecim miejscu w wyrazie),

przy czym oczywiście teza sformułowana w pierwszej nierówności – i będąca wyrazem subiektywnych przekonań – miała w oczach badanych walor obiektywny. Według nich dotyczy bowiem tego, jaka jest faktycznie względna częstość słów o podanych własnościach. Mamy więc do czynienia z jawnym błędem, a nie np. z wyrazem pewnej postawy emocjonalnej. Błąd ten bierze się według Kahnemana stąd, że przy ocenie powyższych prawdopodobieństw zastosowana została heurystyka dostępności: uznajemy to, co łatwiej przychodzi nam do głowy (a taką przewagę mają słowa zaczynające się na *k*, wobec słów, w których *k* występuje na trzecim miejscu) za coś, co obiektywnie występuje częściej.

Ogólnie można stwierdzić, że właściwe przypisanie zdarzeniom prawdopodobieństw (tzn. uzyskanie tego, że $P_{sub} = P_{częst}$) utrudniają nam różne czynniki:

- nacechowanie emocjonalne pewnych zdarzeń,
- spektakularność zdarzeń,
- łatwa dostępność zdarzeń.

W przypadku błędu siódmego, dotyczącego zdarzeń niezależnych, wchodzi w grę również potrzeba tworzenia spójnego obrazu świata, w którym wszystkie zdarzenia są ze sobą jakoś powiązane (np. uznajemy istnienie związku między tym, że czarny kot przebiegł nam drogę i tym, że spotkało nas jakieś niepowodzenie). Przypisujemy ruletce czy kostce do gry „pamięć", która skłania je do różnicowania wyrzucanych wyników (tak, aby robiły one wrażenie rzeczywiście losowe) i doszukujemy się związku między zdarzeniami, które żadnego związku realnie nie wykazują. Dobrym przykładem jest tu argument, jakim posłużyli się przedstawiciele brytyjskiego Królewskiego Towarzystwa Statystycznego (*Royal Statistical Society*), oceniając, czy wypadki śmierci w wyniku tzw. Zespołu Nagłej Śmierci Łóżeczkowej (SIDS) w jednej rodzinie są zdarzeniami niezależnymi (zajmując tym samym stanowisko w głośnym procesie *R vs Collins* – por. np. [Sesardic (2007)]). Mimo, że w wyniku badań klinicznych nie udało się ustalić między nimi żadnej korelacji, twierdzili oni, że „istnieją bardzo mocne argumenty *a priori*, że założenie [o braku takiego związku] jest fałszywe. Mogą przecież istnieć genetyczne lub środowiskowe uwarunkowania, które predysponują pewne rodziny do występowania w nich przypadków SID, a więc, że drugi przypadek takiej śmierci będzie bardziej prawdopodobny"[7]. Jedynym argumentem *a priori*, na jaki można się tu powołać jest jednak to, że postulujemy istnienie w rzeczywistości ścisłych zależności między faktami, pomimo, iż realnie nic na to nie wskazuje.

Wśród błędów dotyczących interpretacji danych warto wskazać na:

8. Błędne utożsamianie $P(A|B)$ z $P(B|A)$;
9. Niewykorzystywanie przy obliczaniu prawdopodobieństwa *a posteriori* danej hipotezy informacji dotyczącej jej prawdopobieństwa *a priori*.

[7] "[…] *there are very strong a priori reasons for supposing that the assumption will be false. There may well be unknown genetic or environmental factors that predispose families to SIDS, so that a second case within the family becomes much more likely*." (cytat za [Sesardic 2007]).

Błąd ósmy nazywa się też sofizmatem prokuratora (*prosecutor's fallacy*), ponieważ zdarza się, że na utożsamieniu wartości dwóch odwrotnych prawdopodobieństw warunkowych opiera się argumentacja mająca świadczyć o winie oskarżonego (por. np. [Koehler 1997]). Rozważmy prostą ilustrację takiego błędu. Niech M oznacza, że na miejscu zbrodni znaleziono materiał genetyczny należący do zabójcy i test DNA wykazał, że jest on zgodny z materiałem genetycznym oskarżonego, a W – że oskarżony jest faktycznie zabójcą. Ekspert – w oparciu o dane statystyczne – przekazuje prokuratorowi informację, zgodnie z którą prawdopodobieństwo, że jakaś inna osoba niż oskarżony będzie miała dokładnie takie same wyniki testu genetycznego (a więc, że morderstwa dokonał ktoś inny i nasz oskarżony jest niewinny) jest bardzo małe – czyli podaje wartość $P(M \mid \text{nie-}W)$. Jest to innymi słowy prawdopodobieństwo, że jakaś inna osoba zostanie przez ten test również zidentyfikowana jako sprawca zbrodni[8]. Załóżmy, że wynosi ono 1/1 000 000. Na tej podstawie prokurator stwierdza, że prawdopodobieństwo, iż oskarżony jest niewinny wynosi właśnie 1/1 000 000. Prawdopodobieństwo tego, że oskarżony jest niewinny w sytuacji, gdy test zidentyfikował jego materiał genetyczny na miejscu zbrodni, to wartość P(nie-W/M). Prokurator dokonuje więc utożsamienia $P_{częst}(M \mid \text{nie-}W)$ z $P_{sub}(\text{nie-}W|M)$, a jednocześnie – traktując swoje uzasadnienie oskarżenia jako prawdę obiektywną – przyjmuje, że $P_{sub}(\text{nie-}W|M) = P_{częst}(\text{nie-}W|M)$. W efekcie więc otrzymuje

$$P_{częst}(M|\text{nie-}W) = P_{częst}(\text{nie-}W|M)$$

Jest to wniosek, do którego nie jest uprawniony, ponieważ wprawdzie wielkości $P_{częst}(M \mid \text{nie-}W)$ z $P_{częst}(\text{nie-}W/M)$ są ze sobą w pewien sposób powiązane (mówi o tym wzór Bayesa[9]), ale na pewno nie są po prostu identyczne.

Błąd dziewiąty nazywa się też błędem „pominięcia bazy" (*base rate fallacy*). Najczęściej ilustruje się go przykładami medycznymi, w których błędnie interpretuje się pozytywne wyników testów na daną chorobę, wyłącznie na podstawie informacji o czułości zastosowanego

---

[8] Na tę wielkość składają się dwie rzeczy: skuteczność testu (nigdy nie jest on doskonały) i teoretyczna możliwość istnienia dwóch różnych osób o identycznym materiale genetycznym.

[9] Wypadku można je zapisać jako: $P(M \mid \text{nie-}W)/P(\text{nie-}W \mid M) = (P(M)/P(\text{nie-}W)$.

testu (por. np. [Gigerenzer, Hoffrage, Ebert 2000], [Koehler 1996]). My rozważymy inny przykład – tzw. problem rolników i bibliotekarzy. Badanym Amerykanom przedstawiono następujący opis:

Steve jest bardzo nieśmiały i wycofany. Zawsze jest chętny do pomocy, ale nie interesuje się zbytnio ludźmi ani rzeczywistością. Jest człowiekiem porządnym i skrupulatnym, ma potrzebę porządku i jasno określonej struktury. Jest bardzo dbały o szczegóły.[10]

Uczestnicy eksperymentu mieli rozstrzygnąć, czy Steve jest bibliotekarzem czy rolnikiem. Prawie wszyscy uznali go za bibliotekarza, zupełnie nie biorąc pod uwagę tego, że w USA rolników jest ponad 20 razy więcej niż bibliotekarzy (a więc informacja dotycząca prawdopodobieństwa, że ktoś jest rolnikiem jest całkowicie zignorowana).

W danej sytuacji opis Stevea jest bardzo reprezentatywny – możemy subiektywnie ocenić, że prawdopodobieństwo tego, że bibliotekarz będzie miał wyliczone cechy jest wielokrotnie większe niż to, że takie cechy będzie miał rolnik. Przyjmijmy (subiektywnie), że dziesięciokrotnie. Jeśli przez E oznaczymy zdarzenie polegające na tym, że dana osoba ma cechy wyróżnione w opisie, przez R, że jest rolnikiem, a przez B – że jest bibliotekarzem, to symbolicznie ustalenia te mają następującą postać:

$P_{sub}(E \mid B)/ P_{sub}(E \mid R) = 10$

Na tej podstawie mamy obliczyć, co jest bardziej prawdopodobne – to że Steve jest rolnikiem czy, że jest bibliotekarzem, co sprowadza się do podania wartości

$P_{częst}(B \mid E)/ P_{częst}(R \mid E)$.

Zastosowanie wzoru Bayesa wymaga znajomości wartości P(R) i P(B), a właściwie ustalenia, która z tych hipotez jest bardziej prawdopodobna *a priori*. Wiemy, że rolników jest przynajmniej 20 razy więcej niż bibliotekarzy, a więc

$P_{częst}(R)/ P_{częst}(B) = 20$.

Podstawiając otrzymujemy:

$P_{częst}(B \mid E)/ P_{częst}(R \mid E) = (P_{sub}(E \mid B)\ P_{częs}(B))/(\ P_{sub}(E \mid R)\ P_{częs}(R)) = 10/20 = ½$,

[10] Przykład pochodzi z książki [Kahneman 2011].

co oznacza, że nawet przy założeniu tak dużej reprezentatywności informacji E, nadal – w oparciu o nią – trzeba uznać, że bycie rolnikiem jest dwukrotnie bardziej prawdopodobne niż bycie bibliotekarzem. Oczywiście możemy się teraz zastanowić, czy nasze założenie jest trafne, tzn. czy

$P_{sub}(E \mid B)/ P_{sub} (E \mid R) = P_{częst}(E \mid B)/ P_{częst}(E \mid R)$.

Proste obliczenia pokazują, że nawet jeśli pomyliliśmy się, dwukrotnie zaniżając obiektywną reprezentatywność informacji E, nadal nie można z całą pewnością uznać Stevea za bibliotekarza[11].

Z kolei w trzecim wyróżnionym obszarze działania funkcji prawdopodobieństwa – tzn. tam, gdzie funkcja $P_{częst}$ jest określona tylko częściowo (np. dla prawdopodobieństw warunkowych) - pojawia się błąd formalny bardzo szczególnego rodzaju:

10. Wnioskowanie zgodnie ze schematem, będącym rozszerzeniem dedukcyjnego schematu *tollendo tollens*[12] na sytuacje niepełnej informacji.

Wnioskowanie takie przebiega następująco:

Przesłanki:

Jeśli zaszło A, to jest bardzo mało prawdopodobne, że zajdzie B;

Zaszło B.

Wniosek: Jest bardzo mało prawdopodobne, że zajdzie A.

co formalnie możemy zapisać jako:

Przesłanki:

$P(B \mid A)$ jest bliskie 0;

Zaszło B.

[11] Jeśli np. uznamy, że tylko 5% rolników spełnia charakterystykę E i zarazem spełnia ją 100% bibliotekarzy, to wynikałoby stąd, że $P(B \mid E)/P(R \mid E) = 1$, a więc $P(B \mid E) = P(R \mid E)$ – czyli z takim samym prawdopodobieństwem należałoby uznać Stevena za bibliotekarza i za rolnika.

[12] Schemat modus *tollendo tollens* ma postać:

Przesłanki: Jeśli zaszło A, to nie zajdzie B; Zaszło B.

Wniosek: Nie zajdzie A.

Wniosek: P(A) jest bliskie 0.

Takie wnioskowania dość często stosuje się w statystyce – opiera się na nim tzw. metoda testu hipotezy zerowej (por. Wójtowicz 2014]). Jest ono charakterystyczne dla sytuacji, gdzie znamy obiektywne prawdopodobieństwo $P_{częst}(B \mid A)$ – czyli prawdopodobieństwo tego, że jeśli prawdziwa jest pewna hipoteza prosta A, to przeprowadzany eksperyment da wynik B, i faktycznie przeprowadzony eksperyment dał wynik B. Nie znamy natomiast apriorycznego prawdopodobieństwa hipotezy A (funkcja $P_{częst}$ nie jest określona dla A), a więc nie możemy zastosować wzoru Bayesa. Zwykle do powyższego schematu dodaje się pewne arbitralne zaostrzenia: jeśli $P(B \mid A)$ jest mniejsze niż tzw. poziom istotności, ustalany zwyczajowo na 0,05, to przyjmuje się we wniosku, że hipoteza A jest po prostu fałszywa. Stosuje się więc schemat:

Przesłanki:
$P(B \mid A) < 0{,}05$;
Zaszło B.
Wniosek: A jest fałszywe.

Ciekawe jest to, że takie rozumowanie z jednej strony jest uznawane po prostu za błąd, a z drugiej – jest bardzo często wykorzystywane w statystyce (por. np. [Gigerenzer, Krauss,Vitouch 2004],[Nickerson 2000]). Tłumaczy się to tym, że zwolennicy częstościowej interpretacji prawdopodobieństwa mogą, za pomocą tej obiektywnie nieuprawnionej metody, wyjść poza ograniczenia, jakim podlega funkcja $P_{częst}$ – rozszerzając jej dziedzinę (w tym wypadku na zdarzenie A). Dzięki temu z jednej strony wydają się zachowywać walor obiektywności – statystycy będą bowiem twierdzić, że na podstawie powyższego rozumowania można stwierdzić, że $P_{częst}(A)$ jest równe (bądź dostatecznie bliskie) zeru – a z drugiej unikają zarzutu, że pojęcie prawdopodobieństwa interpretowane częstościowo ma bardzo ograniczony, niepraktyczny zasięg.

Podsumowanie

Przedstawione wyliczenie dzieli błędy popełniane we wnioskowaniach angażujących jakoś pojęcie prawdopobieństwa ze względu na to, jakiego typu zdarzeniom przypisujemy prawdopodobieństwo. W ob.-szarze pierwszym wyliczyliśmy najczęstsze błędy, które – przez analogię do klasyfikacji przeprowadzanych dla rozumowań dedukcyjnych – możemy nazwać formalnymi. Jeśli dane rozumowanie takiego błędu nie zawiera można je – z perspektywy interpretacji subiektywistycznej – uznać za w pełni racjonalne. Zwróćmy jednak uwagę, że z punktu widzenia częstościowej interpretacji prawdopodobieństwa każde wnioskowanie, które opiera się wyłącznie na wartościach funkcji P_{sub} jest pozbawione sensu (jego przesłankom nie można bowiem przypisać obiektywnej wartości logicznej), nawet jeśli formalny błąd w nim nie występuje. Z drugiej strony ograniczenie przestrzeni rozważań, na którą z definicji narażeni są zwolennicy częstościowej interpretacji, skłania do nadużyć. Można powiedzieć, że jest to problem, z którym boryka się cała statystyka jako nauka: jak na podstawie danej próbki (wyniku pewnego badania statystycznego) wyprowadzić wniosek na temat własności całej populacji. Istnieje silna pokusa, aby w tym celu posłużyć się np. testem hipotezy zerowej – na podstawie dostępnej wiedzy na temat $P_{częst}(B \mid A)$ wyprowadzić wniosek na temat $P_{częst}(A)$. Przez długi czas taki schemat rozumowania był wykorzystywany jako jedno z podstawowych narzędzi w badaniach psychologicznych i medycznych. Jest to jednak po prostu błąd o charakterze formalnym i współcześnie uzyskane na jego podstawie wyniki nie są uznawane za wiarygodne (por. np. [Westover, Westover, Bianchi 2011)]). W świecie, w którym mamy do czynienia z niepełną informacją skazani zatem jesteśmy na balansowanie między rozumowaniami wewnętrznie spójnymi ale opartymi na przesłankach, którym można przypisać tylko subiektywną prawdziwość i rozumowaniami bazującymi na mocnych, obiektywnych przesłankach ale przebiegającymi według nieuprawnionych schematów. W efekcie trudno jest zachować się w pełni racjonalnie…

BIBLIOGRAFIA

D. Christensen, (1991): *Clever Bookies and Coherent Beliefs.* "The Philosophical Review", 2, s. 229-247.

D. Christensen, (1996): *Dutch Book Arguments Depragmatized: Epistemic Consistency for Partial Believers*. "The Journal of Philosophy*"*, s. 450-479.

D. Christensen, (2001): *Preference Based Arguments for Probabilism'*. "Philosophy of Science" 68 (3), s. 356-376.

R. Croson, J. Sundali (2005): *The Gambler's Fallacy and the Hot Hand: Empirical Data from a Csinos.* "The Journal of Risk and Uncertainty", 30(3), s. 195–209.

G. Gigerenzer, U. Hoffrage, A. Ebert (1998): "AIDS counseling for low-risk clients", *AIDS Care*, 10, s. 197-211.

G. Gigerenzer, S. Krauss, O.Vitouch (2004): *The Null Ritual. What You Always Wanted to Know About Significance Testing but Were Afraid to Ask,* w: D. Kaplan (red.): "The Sage handbook of quantitative methodology for the social sciences". Thousand Oaks, CA: Sage, s. 391–408.

J. M. Joyce (1998): *A Nonpragmatic Vindication of Probabilism*. "Philosophy of Science", 65, s. 575-603.

D. Kahneman, A. Tversky, (1971): *Belief in the Law of Small Numbers.* "Psychological Bulletin" 76(2), s. 105-110.

D. Kahneman, A. Tversky (1996): *On the reality of cognitive illusions*. "Psychological Review", 103, s. 582-591.

D. Kahneman (2011): *Pułapki myślenia*, Media Rodzina, Poznań 2011.

J. Koehler (1996): *The Base Rate Fallacy Reconsidered. Descriptive, Normative, and Methodological Challenges*. "Behavioral and Brain Sciences" 19(1), s. 1-53.

J. J. Koehler (1997): *One in millions, billions and trillions: lessons from People v. Collins (1968) for People v. Simpson (1995)* "Journal of Legal Education" 47, , s. 214-223.

D. Lewis (1999): *Papers in Metaphysics and Epistemology*. Cambridge: Cambridge University Press.

R. S. Nickerson (2000): *Null Hypothesis Significance Testing: A Review of an Old and Continuing Controversy*. "Psychological Methods", 5 (2), s. 241-301.

N. Sesardic (2007): *Sudden Infant Death or Murder? A Royal Confusion About Probabilities*. "British Journal for the Philosophy of Science", 58 (2), s. 299-329, *doi:10.1093/bjps/axm015*.

M. B. Westover, K. D. Westover, M. T. Bianchi (2011): *Significance testing as perverse probabilistic reasoning*. "BMC Medicine", 2, s. 9-20, doi:10.1186/1741-7015. 9-20.

A. Wójtowicz (2014): *Falsyfikacjonizm a test hipotezy zerowej*. „Przegląd Filozoficzny Nowa Seria", 92, , s. 87-103.

W. Załuski (2008): *Skłonnościowa interpretacja prawdopodobieństwa*. „Biblos".