STANISŁAW KRAJEWSKI
Uniwersytet Warszawski

NAUCZANIE O KWANTYFIKATORACH

Poznanie pojęcia kwantyfikatora jest uważane za istotny element edukacji filozoficznej. Czy słusznie?

W XIX wieku wprowadzone zostały kwantyfikatory i zapoczątkowane zostały rachunki logiczne operujące kwantyfikatorami i predykatami, czy raczej zmiennymi predykatowymi. Jakieś sto lat temu stało się wiadome nawet poza grupą logików, że te rachunki stanowią znaczne wzmocnienie zarówno sylogistyki jak i rachunku zdań, którego nowoczesne ujęcie pojawiło się zresztą mniej więcej w tym samym czasie. Nie jest więc niczym dziwnym, że zaczęto uczyć o kwantyfikatorach matematyków i filozofów, a potem też informatyków i innych. Standardowe ujęcia budzą jednak wątpliwości, których nauczyciele logiki raczej nie rozważają, a najczęściej zapewne nie do końca je sobie uświadamiają.

Poniżej omawiam dwa problemy wyłaniające się przy używaniu rachunku kwantyfikatorów: jak wskazać zakres kwantyfikatora oraz jakie kwantyfikatory brać pod uwagę. Pierwszy z tych problemów dotyczy podstawowych kwantyfikatorów, o których uczymy, czyli kwantyfikatora ogólnego i egzystencjalnego, $\forall$ oraz $\exists$. Drugi problem dotyczy tego, dlaczego akurat te kwantyfikatory są wyróżnione.

Poruszę jeszcze trzeci problem. Wypada bowiem przy okazji zapytać wprost, czy warto uczyć studentów o kwantyfikatorach. Wymienienie kilku prostych tautologii w minimalnym tylko stopniu unaocznia wartość pojęcia kwantyfikatora ogólnego czy egzystencjalnego. Warto wskazać, jaki zysk może wynieść zwykły student z nauki o kwantyfikatorach. Jak należy o nich uczyć?

1. Zakres i relatywizacja. Nieraz formułujemy zdania ogólne w rodzaju „Każdy pies szczeka", „Każdy szczekający pies denerwuje wszystkich sąsiadów", „Wszystkie dobre pomysły przyszły mi do głowy w czasie spaceru z moim psem". Zapis formy tych zdań w rachunku kwantyfikatorów, czyli predykatów (a logicy używają też czasem terminu „rachunek funkcyjny"), zaczyna się od kwantyfikatora

$(\forall x)$. Do czego odnosi się zmienna x? Jeśli iść za jednym z głównych „ojców" rachunku kwantyfikatorów, czyli Fregem, to ta zmienna odnosi się do wszelkich w ogóle rzeczy. Jest to sensowne na gruncie jego koncepcji, ale rażące dla większości z nas. Nie myślimy bowiem o świecie jako o ogóle wszystkich rzeczy, wśród których są na równi m. in. poszczególne psy, ludzie, pomysły, które mogą mi przyjść do głowy itd. Zresztą wypowiadając wskazane powyżej zdania, w ogóle nie chcemy mówić o wszelkich w ogóle rzeczach, czymkolwiek są owe „rzeczy". Ponieważ chodzi nam nie o cokolwiek, ale o psy (względnie ludzi lub pomysły), musimy to jakoś zaznaczyć. Jak? Nie jest to wcale jednoznacznie określone. Mamy co najmniej trzy możliwości. Pierwsza to staranne zaznaczanie, o jaki obiekt chodzi:

$(\forall x)\ [P(x) \rightarrow \ldots]$, gdzie $P(x)$ to skrót zapisu „x jest psem".

Druga to uznanie, że tak naprawdę nie chodzi o kwantyfikator po prostu, ale kwantyfikator ograniczony, czyli

$(\forall x)_{P(x)} \ldots$, gdzie $P(x)$ to znowu skrót zapisu „x jest psem".

Trzecia możliwość to uznanie, że w naszym kontekście zmienna x oznacza psa, czyli mówiąc bardziej technicznie, że zakresem jej zmienności jest zbiór psów. Jeśli chcemy mówić w jednym kontekście i o psach, i o pomysłach, to musimy wprowadzić różne rodzaje (czyli sorty) zmiennych, np. x to psy, a to pomysły. To ustalenie jest czynione poza formułą, jest potrzebne jako założenie wstępne, niezbędne, by właściwie odczytać formułę. Pojawia się zatem w sposób naturalny język wielosortowy.

Zwróćmy uwagę na to, że w zwykłych wykładach logiki nie analizuje się tej sytuacji, a przyjmuje się – choć niezbyt konsekwentnie – pierwszą metodę, czasem dla zwięzłości używając trzeciej lub drugiej. Chyba zakłada się, że rzecz będzie jasna. Tymczasem nie jest. Może też być myląca.

Czy wspomniane trzy metody są formalnie równoważne? Wydawałoby się, że w zasadzie tak, bo mówimy o tym samym, tylko w nieco inny sposób. Jednakże równoważność nie jest pełna. Wyróżniając bowiem osobny sort zmiennych, zakładamy zwykle, że ich zakres zmienności nie jest pusty. Jest to analogiczne do założenia (które pomijają tak zwane logiki wolne), że uniwersum jest niepuste. Natomiast predykat P

nie podlega założeniu, że jest z konieczności niepusty. Co więcej, nawet dwie pierwsze metody nie są w pełni równoważne ze zbliżonych powodów (co wskazałem w [2005]). Choć bowiem dobrze znane są formalne, czy nawet definicyjne, równoważności

$(\forall x)_{C(x)}\, A(x) \equiv (\forall x)(C(x) \rightarrow \mathrm{A}(x))$, $(\exists x)_{C(x)}\, A(x) \equiv (\exists x)(C(x) \wedge A(x))$,

to jednak pewien problem pojawia się na przykład, gdy chcemy przekształcać równoważnościowo formuły rachunku kwantyfikatorów. Może to być potrzebne choćby po to, by sprowadzić formuły do postaci normalnej. Kwantyfikatory zrelatywizowane traktujemy tak, jak kwantyfikatory niezrelatywizowane. Na ogół nic to nie szkodzi, na przykład prawa de Morgana obowiązują:

$$\neg(\forall x)_{C(x)}\, A(x) \equiv (\exists x)_{C(x)}\neg A(x), \quad \neg(\exists x)_{C(x)}\, A(x) \equiv (\forall x)_{C(x)}\neg A(x).$$

Jednak niektóre tautologie nie są tautologiami po zrelatywizowaniu. Na przykład jest tautologią formuła

$(\forall x)(A \wedge B(x)) \equiv A \wedge (\forall x)B(x)$, gdy w A nie występuje zmienna x,

ale – przy tym samym założeniu – nie jest tautologią

$(\forall x)_{C(x)}(A \wedge B(x)) \equiv A \wedge (\forall x)_{C(x)}B(x)$.

Powodem jest to, że formuła C może nie być spełniona przez żaden obiekt, czyli ekstensja C (w rozpatrywanym modelu) może być pusta. Wtedy formuła po lewej stronie ostatniej równoważności jest prawdziwa, a po prawej to zależy od A. Rzecz może wydawać się raczej banalna, ale zauważmy jest to analogiczne do znanego problemu dotyczącego sylogizmów: jak wiadomo, niektóre tryby sylogistyczne są poprawne tylko wtedy, gdy przyjąć niepustość występujących w nich nazw, ale pełne wyklarowanie tej sytuacji nastąpiło dopiero w wieku XIX.

Pełny opis zrelatywizowanych tautologii potrzebnych do sprowadzania do postaci normalnej wygląda następująco (por. Krajewski [2005]). Pozostają tautologiami po relatywizacji (oczywiście zakładamy, że w A nie występuje zmienna x):

$$(\forall x)(A \vee B(x)) \equiv A \vee (\forall x)B(x), \quad (\forall x)(A \rightarrow B(x)) \equiv A \rightarrow (\forall x)B(x),$$
$$(\exists x)(A \rightarrow B(x)) \equiv A \rightarrow (\exists x)B(x), \quad (\exists x)(A \wedge B(x)) \equiv A \wedge (\exists x)B(x),$$
$$(\forall x)(B(x) \rightarrow A) \equiv (\exists x)B(x) \rightarrow A.$$

Natomiast pozostają tautologiami tylko wtedy, gdy założyć niepustość formuły C, do której relatywizujemy, następujące formuły:

$(\forall x)(A \wedge B(x)) \equiv A \wedge (\forall x)B(x)$, $(\exists x)(A \vee B(x)) \equiv A \vee (\exists x)B(x)$,

$(\exists x)(B(x) \rightarrow A) \equiv (\forall x)B(x) \rightarrow A$.

Innymi słowy są tautologiami (przy założeniu, że w A nie występuje zmienna x):

$$(\exists x)C(x) \rightarrow [(\forall x)_{C(x)}(A \wedge B(x)) \equiv A \wedge (\forall x)_{C(x)}B(x)],$$
$$(\exists x)C(x) \rightarrow [(\exists x)_{C(x)}(A \vee B(x)) \equiv A \vee (\exists x)_{C(x)}B(x)],$$
$$(\exists x)C(x) \rightarrow [(\exists x)_{C(x)}(B(x) \rightarrow A) \equiv (\forall x)_{C(x)}B(x) \rightarrow A].$$

Warto też uświadomić sobie, że wybór jednej z interpretacji formalizmu kwantyfikatorowego jest filozoficznie nieobojętny. W XX wieku odeszliśmy od ontologii, która przyświecała Fregemu i jego bezpośrednim następcom. Wedle niej świat składa się z rzeczy i kwantyfikując odnosimy się do całego świata, czyli do nich wszystkich. To powoduje kłopot – twierdził Hintikka [1997] – bo trzeba zidentyfikować podstawowe obiekty, z których świat jest zbudowany. Tymczasem obecnie praktycznie wszyscy zakładają – przypomina Hintikka – że za każdym razem mamy do czynienia z jakimś wycinkiem świata, a właściwie z pewnym modelem. Teoriomodelowe podejście oznacza, że „dla każdego” znaczy „dla każdego obiektu w domniemanym zakresie”, że odnosimy się nie tyle do świata, co do jednego z wielu możliwych modeli, czyli „możliwych światów.” Stosujemy w zasadzie (uproszczony) formalizm Fregego, choć porzuciliśmy jego ontologię.

2. Wielość kwantyfikatorów. Z perspektywy języka naturalnego istnieje wiele kwantyfikatorów, czyli zwrotów określających liczebność. Zwroty „dla każdego” czy „istnieje chociaż jeden” nie są wyróżnione. Mówimy bowiem równie często „wiele”, „większość”, „kilka”, „dokładnie dwa”, „bardzo dużo”, „niektóre” (w sensie: pewna nie tak mała liczba obiektów), „przeważająca większość”, „nieskończenie wiele”, „prawie wszystkie”. Oprócz tego są określenia czasowe, takie jak „czasem”, „często”, „zawsze”, i przestrzenne, np. „wszędzie”, „gdzieniegdzie”, „prawie nigdzie”. Istnieją też określenia czysto matematyczne w rodzaju „nieprzeliczalnie wiele” (w sensie technicznym, a nie potocznym), „tworzące zbiór nigdziegęsty”, „będące mocy $\aleph_1$”. Co więcej, logicy wprowadzili pojęcie kwantyfikatora uogólnionego. Odnosi się ono do wszelkich struktur relacyjnych z niepustym uniwersum. Wedle Andrzeja Mostowskiego [1957] jest to dowolna (jednostajnie zdefiniowana – tak samo dla każdego modelu) rodzina zbiorów (tzn. podzbiorów uniwersum modelu), a wedle Pera Lindströma [1966] jest to jeszcze ogólniejsza konstrukcja: relacja między zbiorami (tzn. podzbiorami uniwersum modelu), a nawet relacjami (na uniwersum modelu). Dla przykładu: „więcej niż połowa *P* jest *Q*”. Kwantyfikator Henkina [1961], czyli kwantyfikator rozgałęziony „dla każdego *x* istnieje *y*, a niezależnie od tego dla każdego *z* istnieje *t* przy czym…”, jest interpretacją sformułowania używanego w języku naturalnym, ale ma siłę wykraczającą poza logikę elementarną.

Nawet tak zwięźle zarysowany świat kwantyfikatorów imponuje swoim bogactwem. I każe zapytać, czym właściwie wyróżniają się sławetne kwantyfikatory $\forall$ i $\exists$, co sprawia, że akurat o nich uczymy.

Oczywiście niektóre ze wspomnianych wyżej kwantyfikatorów dają się wyrazić przez te podstawowe. Należą do nich „zawsze”, „nigdzie”, „co najmniej 5”, „dokładnie 3” itd. Ponadto w ramach logiki drugiego rzędu lub jeszcze wyższych rzędów da się zdefiniować niektóre inne kwantyfikatory: „akurat połowa”, „istnieje nieskończenie wiele”, „większość”, kwantyfikator Henkina oraz wspomniane i inne kwantyfikatory o charakterze matematycznym. Jest zaskakującym faktem, że kwantyfikator „istnieje nieprzeliczalnie wiele” da się bardzo prosto rekurencyjnie zaksjomatyzować (Keisler [1970]).

Nie są natomiast definiowalne w logice, choćby wyższych rzędów, ani w matematyce kwantyfikatory typu „kilka”, „wiele”, „bardzo dużo”. Powinno być to oczywiste. W zależności od sytuacji te zwroty mają zupełnie inne znaczenie numeryczne. Na przykład powiemy, że „bardzo wiele osób w tej sali to analfabeci”, jeśli będzie to dziesięć osób w stuosobowym zgromadzeniu dorosłych ludzi w dzisiejszej Polsce. Jeśli będzie wśród nich taka sama liczba okularników, powiemy, że „całkiem mało osób na tej sali to okularnicy”. Ocena liczebności jest uzależniona od naszego wstępnego wyobrażenia normy. To wyobrażenie jest raczej subiektywne, a w wielu sytuacjach, w których używamy zwrotów kwantyfikatorowych, musi być subiektywne.

Próbując formalnie ująć kwantyfikator „dużo”, musielibyśmy wymagać ustalenia rodziny zbiorów (podzbiorów uniwersum modelu), która by służyła jako zestaw zbiorów, o których można powiedzieć „dużo”. Innymi słowy, zdanie $(Dx)A(x)$ jest prawdziwe w danej strukturze, o ile zbiór $\{m \in M: (M,\ldots) \models A[m]\}$ należy do wyróżnionej rodziny $R \subset \mathcal{P}(M)$. Problem z takim ujęciem polega na tym, że interpretacja kwantyfikatora „mało” byłaby identyczna… Oczywiście chodziłoby o inną rodzinę zbiorów, ale samo wyróżnienie tej rodziny nie może być jednostajne, zależne tylko od modelu, bo jak widać w powyżej przytoczonym przykładzie zbiór dziesięcioelementowy jest raz w rodzinie „duże”, a kiedy indziej w rodzinie „małe”. Definicja tej rodziny jest zależna od okoliczności i intencji, czyli wykracza poza podejście formalne. Mówiąc inaczej, nie zakładamy niezmienniczości względem izomorfizmu, czyli matematycznego założenia, które czynili twórcy matematycznego pojęcia kwantyfikatora uogólnionego.

Formalna czy matematyczna definicja nie wystarczy, a mówiąc inaczej, nie wystarczy definicja czysto semantyczna. Potrzebna jest definicja pragmatyczna, czyli uwzględniająca podmiot używający danego kwantyfikatora i okoliczności jego użycia. Już to samo jest pouczające. A studentom pokaże zarówno siłę jak i ograniczenia rachunków logicznych.

3. Korzyści z uczenia o najprostszych kwantyfikatorach. Czy warto więc uczyć studentów o kwantyfikatorach? Uważam, że tak, ale nie jest to oczywiste, jeśli zważyć, jak się przedstawia rachunek kwantyfikatorów w różnych podręcznikach „dla humanistów”. Nie tylko pomija się istnienie innych kwantyfikatorów niż $\forall$ i $\exists$, ale i o nich mówi się tylko najprostsze rzeczy. Wspomina się bowiem tylko o najprostszych tautologiach. Ich identyfikacja niewiele wnosi, bo czysto intuicyjne ujęcie wystarczy do stwierdzenia, że mamy do czynienia z wynikaniem logicznym. Można na to odrzec, że podobnie zawsze było z sylogistyką. W miarę bystry człowiek będzie rozumował poprawnie w zakresie trybów sylogistycznych, nic nie wiedząc o nich i ich nazwach. Odpowiedzią na to jest – moim zdaniem – fakt, że dało się opisać wszystkie poprawne tryby sylogistyczne i można o tym nauczać. To daje poczucie, że w zakresie wypowiedzi dostępnych w języku sylogizmów, czyli zdań kategorycznych, mamy pełne rozeznanie. Otóż tak samo jest z rachunkiem zdań, bo można zdefiniować tautologie i określić procedurę sprawdzania, czy dana formuła jest tautologią. Podobnie jest z rachunkiem kwantyfikatorów, bo i tu można zdefiniować tautologie. Jednak ten ostatni krok nie jest zwykle robiony: ta definicja nie jest taka prosta, a gdy zdefiniować tautologie aksjomatycznie dowód twierdzenia o pełności staje się konieczny, a jest zdecydowanie nieprosty. Jeśli nie przywoływać twierdzenia o pełności, to jakie są korzyści z uczenia o kwantyfikatorach $\forall$ i $\exists$?

Otóż po pierwsze jest pouczające, że samo pojęcie uogólniania – bo to jemu odpowiada $\forall$, a $\exists$ jest oczywiście definiowalny przez $\forall$ – wystarczy do zdefiniowania wielu innych pojęć, np. „istnieje dokładnie jeden”, czy „istnieją 3 lub 4 obiekty , które…”. Gdy wprowadzić pojęcia wyższych rzędów da się zdefiniować o wiele więcej, np. „jest tylko skończenie wiele”, a w logice elementarnej tego kwantyfikatora nie da się zdefiniować. Dowody tych faktów nie należą do elementarnego kursu logiki, ale można o nich wzmiankować.

Po drugie, wskazanie, że nie wszystkie kwantyfikatory da się tak zdefiniować, bo np. „mało” ma sens zależny od sytuacji, wskazuje, jak wspomniałem wyżej, na ograniczenia podejścia czysto logicznego.

Po trzecie, najważniejszym faktem dotyczącym kwantyfikatorów, pomijanym w słabych podręcznikach, jest to, że dopiero kombinacja kwantyfikatorów – innymi słowy, ich zagnieżdżenie – wyraźnie wzmacnia siłę wyrazu. Negowanie zdania z kilkoma różnymi kwantyfikatorami może nie być proste i zapis formalny może istotnie pomóc.

Po czwarte, praktycznie istotne jest to, że ważna jest kolejność kwantyfikatorów. Jest pouczające, że formuła

$$(\exists x)(\forall y)R \rightarrow (\forall y)(\exists x)R$$

jest tautologią, ale odwrotna implikacja nie jest. Ponadto należy wiedzieć – i to jest po piąte – że niektóre potoczne wyrażenia z dwoma kwantyfikatorami lub większą ich liczbą są wieloznaczne. Dwuznaczność zdania „Kogoś każdy lubi” jest właśnie najlepiej widoczna, gdy rozważać kolejność kwantyfikatorów, i zapewne tylko w ten sposób może być zrozumiała.

Po szóste, można mierzyć komplikację logiczną pojęcia właśnie liczbą zagnieżdżonych kwantyfikatorów potrzebnych do jego zdefiniowania. Jest to rzecz wykładana logikom, ale wskazanie tego będzie ciekawe nawet dla laików.

Po siódme wreszcie, pojęcie tautologii rachunku kwantyfikatorów da się opisać dość poglądowo jako prawdziwość przy dowolnych interpretacjach zmiennych predykatowych i w dowolnych zbiorach jako zakresie zmienności zmiennych indywiduowych. Nawet takie mało techniczne ujęcie wydaje mi się pouczające dla filozofa i każdego humanisty.

Prace cytowane

Henkin, Leon [1961]: *Some remarks on infinitely long formulas*, "Infinitistic Methods", Pergamon Press, Oxford 1961, s. 167-183.

Hintikka, Jaakko [1997]: "Selected Papers" vol. 2, *Lingua Universalis vs. Calculus Ratiocinator: An Ultimate Presupposition of Twentieth-Century Philosophy*. Kluwer 1997.

Keisler, H. Jerome [1970]: *Logic with the quantifier "there exist uncountably many"*. "Annals of Mathematical Logic" 1, 1970, s. 1-93.

Krajewski, Stanisław [2005]: *Remark on quantifiers and their relativisations, (Acta Universitatis Wratislaviensis* tom 23) "Logika", Wrocław 2005, s. 37-41.

Lindström, Per [1966]: *First Order Predicate Logic with Generalized Quantifiers*, "Theoria" 32, 3, 1966, s. 186-195.

Mostowski, Andrzej [1957]: *On a generalization of quantifiers*, "Fundamenta Math". 44 (1957), s. 12-36.