EDUKACJA FILOZOFICZNA
Vol. 61 2016

GRETA J. WIERZBIŃSKA
Uniwersytet Jagielloński

WITTGENSTEINOWSKA KRYTYKA I TWIERDZENIA GöDLA A KRYTYKA METAMATEMATYKI

Pojawienie się antynomii osłabiło wyróżniony niegdyś status matematyki, osłabiając przekonanie wielu matematyków o absolutnym charakterze prawdy matematycznej, który miał ratować program Davida Hilberta. Sam Hilbert nie miał wątpliwości co do stabilności „normalnej" matematyki. Inaczej rzecz miała się w przypadku Wittgensteina, który od zawsze był nastawiony sceptycznie wobec ambitnych projektów poszukiwania na gruncie matematyki pewności absolutnej. Systematycznie kwestionując rzekomą filozoficzną doniosłość matematyki, sceptycznie odnosił się do propozycji traktowania poznania matematycznego jako wyróżniającego się niepodważalną pewnością. Aby wyraźnie uchwycić kontekst Wittgensteinowskich uwag, znanych powszechnie jako „krytyka" pierwszego twierdzenia Gödla, należy bliżej przyjrzeć się przeprowadzonemu przez niego nieco wcześniej ataku na Hilbertowskie pojęcie metamatematyki, mając jednak na uwadze fakt, iż Wittgenstein gotów był wykazać nie tyle bezużyteczność metamatematyki Hilberta[1], ile bezużyteczność jej filozoficznego *uzasadnienia*, które

[1] Warto przy tej okazji odnotować, iż sam Gödel również zajmował krytyczne stanowisko wobec programu Hilberta. Gödel uważał program ugruntowania matematyki poprzez teoriodowodową redukcję za oparty na zasadniczo błędnych założeniach filozoficznych. Zdaniem Gödla rozstrzyganie problemów matematycznych wymaga wyjścia poza analizy teoriodowodowe i odwołania się do naszego rozumienia pojęć matematycznych, czysto syntaktyczne pojęcie 'dowodliwości' nie może, zdaniem Gödla być w pełni adekwatną reprezentacją pojęcia 'uzasadnienia". Ulubione instrumentarium Hilberta, tj. matematyka idealna, stanowi według Gödla system zinterpretowany. Hilbert podobnie jak Gödel są optymistami w kwestii rozwiązywania otwartych problemów matematycznych. Jednak optymizm Hilberta wynika z jego wiary w skuteczność metod teoriodowodowych, natomiast optymizm Gödla z

traktował jako niezdrowy przejaw matematycznego platonizmu[2]. Otóż jeśli pamiętamy, iż na gruncie Wittgensteinowskiej filozofii matematyki teorie matematyczne są interpretowane jako *sui generis* gry językowe, których zadaniem jest wdrażanie określonych procedur,[3] natomiast to teoria, wraz z całym kontekstem, ze swoimi metodami dowodzenia, aksjomatami, regułami itp. generuje sens pojedynczego zdania, to każde z takich zdań należy badać wyłącznie na gruncie systemu, któremu zostało przypisane.

Podobne uwagi pojawiały się w rozmowach Wittgensteina ze Schlickiem i Waismannem, z kolei w *Philosophical Grammar* można je znaleźć we fragmentach poświęconych PM Russella i Whiteheada, gdzie Wittgenstein *explicite* twierdzi, iż podobnie jak w przypadku Hilbertowskiej metamatematyki, tzw. „proza" PM, o której była mowa wyżej, może zostać uznana najwyżej za nietrafioną próbę dostarczenia *teorii* (to zaś, zdaniem Wittgensteina, był podstawowy błąd zwolenników platonizmu). „To, co stanowi rachunek musi zostać odseparowane od tego, co usiłuje być (i, oczywiście, nie może być) *teorią*. Reguły gry muszą zostać odseparowane od nieistotnych zdań dotyczących figur szachowych."[4]- zauważa w *Philosophical Grammar*. Wittgensteinowska strategia wymierzona jest więc w przesłankę o istnieniu pewnej hierarchii poziomów dyskursu, tj. w *meta-matematyczną* przesłankę, którą uważał za podstawę argumentu Gödla. Ponieważ – zdaniem Wittgensteina – nie tylko zdania mają różny sens w różnych teoriach, ale także zdanie nieformalne ma inny sens niż zdanie należące do języka sformalizowanego (będącego formalizacją zdania pierwszego), to niemożliwe jest odzwier-

---

wiary w możliwość dotarcia do fundamentalnych prawd matematycznych, w możliwość lepszego „uchwycenia" znaczenia podstawowych pojęć matematycznych.

[2] To jest poglądu, który w dużym uproszeniu można określić jako stanowisko dopuszczające istnienie zdań prawdziwych, choć niedowodliwych, a którego implikacjami są tezy o poza empirycznym dostępie do idei matematycznych czy apriorycznym (w sensie Kanta) statusie wiedzy matematycznej.

[3] A zatem według S. Shankera (*Wittgenstein Remarks on Gödel's Theorem,* s.182) z punktu widzenia Wittgensteina program Hilberta nie ma sensu, „wszelkie znaczenie, jakie twierdzenie Gödla ma dla filozofii matematyki, leży w jego roli, jaką jest nie obalenie, ale raczej *reductio ad absurdum* programu Hilberta".

[4] PG s.468.

ciedlenie związków zachodzących w ramach jednej teorii na gruncie innej teorii. Różnica między nimi dotyczy bowiem nie tylko siły ekspresji, funkcji, ale i struktury.

Z punktu widzenia Wittgensteina np. aksjomat indukcji na gruncie arytmetyki Peano nie jest tym samym, co aksjomat indukcji *tout court*, choć na ogół sądzi się, że zachodzi między nimi pewien głęboki związek. Wyrażenia sformalizowane, są, zdaniem Wittgensteina pozbawione mocy ekspresyjnej, stanowią zaś jedynie reguły użycia pojęć. Warto w tym miejscu dodać, iż *odwzorowanie* (Abbildung) stwierdzeń metamatematycznych na pewne formuły arytmetyczne nie oznacza *odzwierciedlenia* treści jednych przez drugie czyli związków metamatematycznych przez arytmetyczne. Ma to związek z pytaniem o to czy numery Gödla *oznaczają* odpowiadające im wyrażenia teorii przedmiotowej. Charakter odpowiedzi na to pytanie zależy jednak w tym miejscu od charakteru umowy, którą skłonni jesteśmy przyjąć, ponieważ to my ustalamy jakie obiekty przyporządkujemy nazwom. Ponieważ matematyka ma, zdaniem Wittgensteina charakter normatywny, to często pojawiający się w jego pracach zwrot „die Sätze der Mathematik" należy tłumaczyć jako „zdania matematyki", a nie „twierdzenia matematyki" (bo np. zdanie „2+2=4" trudno nazwać twierdzeniem). W kontekście tego rodzaju założeń, zdania matematyczne są zatem pozbawionymi statusu opisowego regułami gramatyki, apriorycznymi „wzorcami" przekształcania zdań empirycznych[5]. W tym kontekście opanowywanie technik matematycznych jest zachowaniem o charakterze *par excellance* językowym, sama matematyka zaś jest częścią uprawianych przez nas gier językowych. To dlatego w ujęciu Wittgensteina nie możemy mówić o jednej, ale *wielu* matematykach (Wittgenstein posługuje się tu określeniem 'wielobarwność' matematyki), różnorodności systemów i teorii matematycznych, co wiąże się m.in. z niemożliwością przyjęcia jakiejś fundamentalnej metateorii, stanowiącej *podstawę* dla porównywania hierarchii teorii, a w dalszej konsekwencji z całkowitą nieprzekładalnością znaczeń

[5] Więcej na ten temat można znaleźć w rozdziale jedenastym *Philosophische Grammatik* (Frankfurt am Main 1984). Moje tłumaczenie tego tekstu, pt. *Matematyka porównana z grą*, ukazało się w „Mêlée. Kwartalniku Filozoficzno-Kulturalnym" 2013, nr 3.

między teoriami.

W ujęciu Wittgensteina teorie matematyczne można porównać zatem do gier językowych, w których stawką jest unikanie sprzeczności (co jak wiemy Wittgenstein krytykował). W świetle powyższych uwag należy zauważyć, iż podczas gdy w normalnych okolicznościach przyjęlibyśmy, iż zdanie Gödla skonstruowane w ramach AP czy arytmetyki drugiego rzędu A2 jest tym samym zdaniem (jak wiadomo język AP zawiera się w języku A2, twierdzenia AP są również twierdzeniami A2), to trochę inaczej przedstawia się sprawa ze sformułowaniem zdania Gödla na gruncie teorii mnogości ZF. Nie ma tam bowiem symboli dodawania i mnożenia, choć oczywiście można je jakoś zdefiniować. Pewnym rozwiązaniem byłoby stworzenie interpretacji, niejako metateorii AP[6] a zatem mielibyśmy do dyspozycji niejako jedną teorię i jej fragment. W tym miejscu widać nieintuicyjność stanowiska Wittgensteina, choć z drugiej strony przyjmowane przez niego stanowisko staje się zrozumiałe i trafne jeśli porównamy teorię ZF i Quine'owską NF, co do których nie ma pewności czy jedna interpretuje się w drugiej, mianowicie mimo, iż np. zdanie 'istnieje zbiór pusty” jest wyrażalne w obu teoriach identycznie (języki są identyczne i zamierzone interpretacje są podobne, chodzi o opis możliwie wielu zwyczajnych zbiorów) to mimo, że formalnie jest to ten sam napis, nie jesteśmy w stanie powiedzieć, że zdanie to ma *ten sam sens* na gruncie obu teorii[7]. Jest to przykład idący po linii Wittgensteina, który zapewne uznałby, iż zbiór pusty posiada inny sens w każdej ze wspomnianych teorii ponieważ uniwersa zbiorów, które one wyznaczają są nieprzystawalne. Rozwiązaniem problemu byłoby tu przyjęcie stanowiska platonizującego i uznanie, że zbiór pusty istnieje realnie, natomiast teorie. o których mowa konstruują po prostu jego indywidualne *opisy*. A zatem, powtórzmy to raz jeszcze, w opinii Wittgensteina każde twierdzenie posiada sens tylko w ramach systemu, w którym go dowiedliśmy i wyłącznie na jego gruncie należy je rozpatrywać. Jak zauważa słusznie Stanisław Krajewski: „Jest w tym wyrażona pewna głęboka prawda, ale zarazem pominięta inna prawda.

[6] Por. Tarski-Mostowski-Robinson [1953]

[7] Szerzej na ten temat w: Krajewski, S.: *Twierdzenie Gödla i jego filozoficzne interpretacje*, Warszawa: IFiS PAN 2003.

Ta pierwsza prawda to fakt, że nigdzie poza badaniami z zakresu podstaw nie rozpatrujemy zdań formalnych, niezinterpretowanych. Jednakże jest też inna prawda: twierdzenia metamatematyczne o teorii czysto formalnej mogą coś mówić o zdaniach teorii zinterpretowanej. Na przykład dowód rozstrzygalności arytmetyki Presburgera daje metodę stwierdzania prawdziwości lub fałszywości dowolnego zdania mówiącego tylko o dodawaniu liczb naturalnych”[8]. Sedno Wittgensteinowskiego argumentu dotyczącego autonomii systemów matematycznych polega na tym, iż zdanie matematyczne jest niejako wewnętrznie związane ze swoim dowodem/systemem dowodowym. Jeśli pytamy bowiem o to, ‘w jakich okolicznościach w grze Russella [tj. w rachunku] stwierdza się [tj. jako ‘*prawdziwe*’] jakieś zdanie” to odpowiedź brzmi “na końcu któregoś z jego dowodów albo jako 'podstawowe prawo’” (Pp.). W inny sposób nie używa się w tym systemie zdań twierdzących sformułowanych w symbolice Russella”’[9].

Jeśli więc być *zdaniem matematycznym,* oznacza bycie elementem pewnego systemu, to zdania matematyczne nie mogą być przeniesione z jednego systemu do drugiego ponieważ reguły definiujące znaczenie pojęć pierwotnych w tych systemach mogą się różnić, choć oczywiście możemy posłużyć się tym samym zdaniem do przedstawienia subtelnych przesunięć znaczenia; Kluczowe jest, co podkreśla Wittgenstein, zdanie sobie sprawy z gramatycznej autonomii takich zdań. „(...) a zatem są to zdania prawdziwe w jakimś *innym* systemie, tzn. takie, które można zasadnie stwierdzać w jakiejś innej grze”[10]. W tym kontekście znaczenie pewnego zdania matematycznego jest ściśle wyznaczone przez reguły rządzące jego użyciem w określonym systemie. Jeśli mamy do czynienia z dwoma autonomicznymi rachunkami, wówczas nie ma znaczenia to, jakie podobieństwo wykazują reguły dwóch systemów. Dopóki różnią się one, dopóty mamy do czynienia z *odrębnymi* systemami matematycznymi, nie ma więc sensu mówić o *tym samym* zdaniu, które pojawia się w każdym z nich. Muszą to być z konieczności dwa równoległe zda-

[8] S. Krajewski: *Twierdzenie Gödla i jego filozoficzne interpretacje,* Warszawa: IFiS PAN 2003, s. 298.

[9] UPM, dod III §6.

[10] Por.§7 UPM, dod III.

nia pojawiające się w tych dwóch systemach, które z łatwością mogą zostać odwzorowane na siebie nawzajem. Dlatego deklaracja Gödla, że skostruował on *identyczne* wersje tego samego zdania matematycznego w dwóch różnych systemach jest, zdaniem Wittgensteina całkowitym nonsensem. Tego rodzaju sytuację wyklucza po prostu sam charakter reguł obowiązujących w ramach logicznej gramatyki zdania matematycznego. W opinii Wittgensteina zatem, Gödel mógł był najwyżej stwierdzić, iż skonstruował pararelne, czy też podobne zdania matematyczne, gdyby jednak to zrobił, to odkrycie, iż jedno z nich jest niedowodliwe w swoim systemie, podczas gdy to drugie jest prawdziwe, straciłoby swój problematyczny charakter. Sens konstruowania nowego systemu polega zatem na uzupełnieniu istniejącego rachunku jakąś nową regułą umożliwiającą nam przekształcenie pewnego pozbawionego znaczenia wyrażenia w sensowne – tj. rozstrzygalne – zdanie matematyczne. Sytuacją staje się bardziej skomplikowana jeśli zamiast dwóch autonomicznych rachunków, mamy do czynienia, jak pokazał Gödel, z dwiema wersjami *tego samego* zdania. Wittgenstein analizuje zdanie, które brzmi: ‘P-zdanie o numerze Gödlowskim *i* jest niedowodliwe’. Siłą argumentacji Wittgensteina jest spostrzeżenie, że określając wyrażenie matematyczne jako niedowodliwe zaprzeczamy niejako, że jest ono pełnoprawnym zdaniem matematycznym tj. że jest ono zrozumiałe. W sytuacji, w której nie posiadamy dowodu tego zdania, nie możemy mówić o nim jako o sensownym, choć nieudowodnionym zdaniu matematyki, ile raczej jako o pewnym pozbawionym znaczenia wyrażeniu. Nie jest ono również zdaniem metamatematycznym, które dotyczy pewnego zdania należącego do języka przedmiotowego, ale sformułowaniem należącym do *prozy*, które podobnie jak w przypadku zdania ‘‘ostatnie twierdzenie Fermata jest niedowodliwe”, zdaniem Wittgensteina, stwierdza po prostu, że dany ciąg matematycznych symboli jest niezrozumiały.

Istnieją uzasadnione podstawy, by przypuszczać, iż Wittgenstein podchwycił Gödlowską uwagę z artykułu z 1931 roku, że ‘zdanie, które jest nierozstrzygalne w systemie PM, jest przecież rozstrzygalne w toku badań metamatematycznych'[11]. sądząc, że oddaje ona istotę proponowanego przez niego rozwiązania problemu rozstrzygalności ujętego nie tyle w kontekście epistemologicznym, ile rozumianego jako próba rozjaśnienia gramatyki logicznej pojęcia „zdania matematycznego" oraz zdefiniowania reguł, na mocy których bycie sensownym zdaniem matematycznym oznacza po prostu bycie rozstrzygalnym.

Nawiązując do rozważań przeprowadzonych wcześniej, w rozdziale dotyczącym antynomii kłamcy, jeśli jednak potraktujemy zdanie 'P-zdanie o numerze Gödlowskim *i* jest niedowodliwe' jako stwierdzenie matematyczne (w przeciwieństwie do stwierdzenia będącego przypadkiem *prozy*), to musi ono faktycznie odnosić się do samego siebie. W tym miejscu Wittgenstein zauważa, iż twierdzenie Gödla wykazuje niebezpieczne podobieństwo do klasycznych sprzeczności jak paradoks kłamcy czy paradoks Epimenidesa. Sytuacja ta, jego zdaniem, wprowadza zamęt pojęciowy, u którego podstaw znajduje się przekonanie, iż matematyka posiada 'luki'.

„Załóżmy, że dowodzę niedowodliwości P (w systemie Russella), pisze Wittgenstein w *Uwagach o podstawach matematyki*, tym samym dowodzę P. Otóż gdyby dowód ten był dowodem w systemie Russella dowiódłbym tym samym, że równocześnie należy on i nie należy do systemu Russella"[12]. Jak widać, Wittgenstein celowo odrzuca tu proponowane przez Gödla hierarchiczne rozróżnienie poziomów, na których funkcjonuje jego kłopotliwe zdanie (choć niektórzy krytycy sugerują, że po prostu nie wyczuł on pewnego niuansu), argumentując, że 'P-zdanie o numerze Gödlowskim *i* jest niedowodliwe' nie jest ani prawdziwe ani fałszywe, ale została z niego wymazana wszelka treść informacyjna. I jest to ostateczny powód, dla którego Wittgenstein wyciąga wniosek, iż „Jest to jałowa sztuka! – Jest to gra językowa, podobna do gry w łapki"[13]. Należy dodać, iż Wittgenstein nie był odosobniony w swoich spostrzeżeniach i sceptycznym stosunku wobec wyników Gödla. Istotnie, choć sam pomysł arytmetyzacji składni jest

---

[11] „Der im System PM unentscheidbare Satz wurde also durch metamathematische Ueberlegungen doch entschieden." s.176.

[12] UPM dod III §11.

[13] UPM dod. III §12.

dość prosty, to jego wykonanie w sposób ścisły jest niezaprzeczalnie dość żmudnym przedsięwzięciem. Nierozstrzygalne zdanie Gödla faktycznie stanowi dość enigmatyczną, skomplikowaną i tak długą konstrukcję, że nikt go jeszcze naprawdę nie napisał i nikt tak naprawdę nie zna jego matematycznej treści. Przekonanie to nawet obecnie podzielają niektórzy logicy i matematycy zarzucając konstrukcji Gödla, że po prostu nie posiada ono właściwie treści matematycznej i trzeba będzie czekać setki lat, aż matematycy poczują praktyczną potrzebą jego rozstrzygnięcia w jakimś kierunku. Wydaje się, że to właśnie miał na myśli Wittgenstein pisząc, iż zdanie Gödla jest *bezużyteczne,* stanowi ono bowiem właściwie pewien nieuchwytny, niepokojąco odległy punkt na dalekim horyzoncie nauki, nie mający jednak żadnego wpływu na praktyczne uprawianie matematyki a nawet arytmetyki.

Przyjirzyjmy się słynnemu fragmentowi paragrafu 8 *Uwag o podstawach matematyki:*

„Wyobrażam sobie, że ktoś kto prosi mnie o radę, mówi: „Skonstruowałem zdanie w symbolice Russella (oznaczmy je jako ‘p’), które za pomocą pewnych definicji i przekształceń można zinterpretować tak, by głosiło: ‘p nie jest dowodliwe w systemie Russella’. Czy o zdaniu tym nie muszę powiedzieć: z jednej strony jest ono prawdziwe, z drugiej zaś niedowodliwe? Gdyby bowiem przyjąć, że jest fałszywe, prawdą byłoby, że jest dowodliwe! A przecież nie może tak być. Gdyby je zaś udowodniono, dowiedziono by tym samym, że nie jest ono dowodliwe. Tak więc może być ono jedynie prawdziwe, ale niedowodliwe”[14]. „Podobnie jak wtedy gdy pytamy o to, „w jakim systemie ‘dowodliwe’?”, powinniśmy też pytać o to: „ w jakim systemie ‘prawdziwe’?”. ‘Prawdziwe w systemie Russella’ znaczy, jak wiadomo, tyle co ‘udowodnione w systemie Russella’. ‘Fałszywe w systemie Russella’ oznaczałoby zaś tyle co ‘coś przeciwnego zostało dowiedzione

[14] Putnam przypisuje paragrafowi nr 8 kluczowe znaczenie filozoficzne. Mianowicie, jeśli założy się, że p jest dowodliwe w systemie Russella, to należy zrezygnować z przekładu p na polskie zdanie „p nie jest dowodliwe”, ponieważ jeśli p jest dowodliwe w PM, to PM nie jest ω niesprzeczny, nie jest możliwy zatem przekład zdania „p” na zdanie „p nie jest dowodliwe w PM”. Jest tak ponieważ predykat „liczba naturalna Ln.(x)” w ‘P’ nie może być zinterpretowany tak jakby *x* było liczbą naturalną.

w systemie Russella'. Co znaczy zatem twoje: „gdyby przyjąć, że zdanie to jest fałszywe"? W systemie Russella znaczy to 'gdyby przyjąć, że coś przeciwnego zostało w systemie Russella udowodnione'; jeżeli takie jest twoje założenie, to chyba porzucisz teraz interpretację, w myśl której zdanie to jest niedowodliwe. A przez rzeczoną interpretację rozumiem jego przekład na owo zdanie zwykłego języka (tzn. na zdanie „p nie jest dowodliwe w systemie Russella"). Jeżeli przyjmujesz, że zdanie to jest dowodliwe w systemie Russella, to tym samym jest ono prawdziwe w sensie Russella, a przeto znów trzeba porzucić interpretację „p nie jest dowodliwe". Jeżeli przyjmujesz, że zdanie to jest prawdziwe w sensie Russella, to wynika stąd to samo." Dalej: jeżeli zdanie to ma być fałszywe w jakimś sensie innym niż Russella, to nie stoi to w sprzeczności z tym, że zostało ono dowiedzione w systemie Russella. (To, co w szachach nazywa się „przegraną", może wszak w innej grze stanowić wygraną.)"

Pierwszą część paragrafu można potraktować jako rekonstrukcję semantycznego i nieformalnego dowodu pierwszego twierdzenia Gödla, które stwierdza, iż każda formalna teoria będąca w stanie wyrazić arytmetykę Peano jest albo sprzeczna albo niezupełna, ponieważ zawsze istnieje jakieś zdanie arytmetyczne, które jest prawdziwe, ale niedowodliwe na gruncie tej teorii. Można (co czyni też Gödel) sformalizować ten argument przy pomocy matematycznych definicji takich kategorii semantycznych jak prawdziwość, dowodliwość, aksjomatyzowalność itp. Juliet Floyd na przykład zauważa, że pierwszą część paragrafu można by z powodzeniem uznać za pewną wersję, drugą zaś za negację twierdzenia Gödla. Owa wersja twierdzenia Gödla (a także jego dowodu), na którą powołuje się Wittgenstein, przyjęłaby w tym wypadku następującą postać: mamy zdanie matematyki p, które można zinterpretować jako „p jest niedowodliwe". Jeśli p jest fałszywe, to otrzymujemy dowodliwe, ale fałszywe zdanie, co nie jest możliwe; a zatem musi ono być prawdziwe, ale niedowodliwe. Natomiast odrzucenie twierdzenia Gödla (z drugiej części paragrafu) – w dużym skrócie – wyglądałoby następująco: nie ma sprzeczności w fałszywym, ale dowodliwym zdaniu – fałszywość zależy od kontekstu (czy też od „gry"). Krótko mówiąc te same słowa mogą czasami wyrażać prawdę, a czasem fałsz. W drugiej części paragrafu, Wittgenstein próbuje pokazać, że pierwsze twierdzenie Gödla nie może mówić czegokolwiek na temat filozoficznych pojęć 'prawdziwy', 'dowodliwy' itp., w szczególności zaś nie pociąga za sobą realizmu matematycznego (platonizm). Zamiast tego - jak twierdzi Wittgenstein – posługuje się ono definicjami tych pojęć jako bazą, z której wyprowadzamy dowód, pogląd ten jest zgodny ze zdecydowanie negatywnym stanowiskiem Wittgensteina w sprawie wyciągania filozoficznych konsekwencji z twierdzeń matematyki. Ściśle rzecz biorąc, argument pojawiający się w drugiej części paragrafu zarazem zakłada i stwierdza co następuje: (a) 'dowód' jest pojęciem zrelatywizowanym do systemów formalnych (b) 'prawda' jest pojęciem zrelatywizowanym do systemów formalnych. O ile (a) jest bezsporne, to (b) przywołuje stary spór między platonikami i resztą tj. formalistami, intuicjonistami, konwencjonalistami itd.) w sprawie natury prawdy matematycznej, podejmując pytanie o to, czy zdania matematyczne mogą być prawdziwe niezależnie od swojej dowodliwości? Należy dodać, iż zdaniem Wittgensteina, samo pierwsze twierdzenie Gödla nie rozstrzyga żadnego z tych pytań, semantyczne sformułowanie dowodu (z pierwszej części paragrafu) nie mówi, jego zdaniem, niczego na temat filozoficznej natury prawdziwości czy natury samej matematyki. Jak wiadomo jednak, przekonanie, zgodnie z którym I twierdzenie pociąga za sobą platonizm, jest dość rozpowszechnionym poglądem, dodajmy, iż podobnego zdania był sam Gödel, a także m.in. Roger Penrose, który zauważa, iż: „Twierdzenie Gödla pokazuje, że ten punkt widzenia (formalizm) nie jest naprawdę możliwy do obrony na gruncie fundamentalnej filozofii matematyki. Pojęcie prawdy matematycznej wykracza poza całe pojęcia formalizmu. Jest coś absolutnego czy nawet 'boskiego' w pojęciu z prawdy matematycznej. Tego właśnie dotyczy (…) platonizm matematyczny. Każdy określony system formalny posiada tymczasową i „ludzką" własność. (…) Autentyczna prawda matematyczna wykracza poza jedynie ludzkie konstrukcje"[15]. Wittgenstein jest zdecydowanie przeciwny opinii, jakoby

[15] R. Penrose (1989): *The Emperor's New Mind: Concerning Computers, Minds, and the Laws of Physics*, s.146

te, jak to określa, *górnolotne* i ambitne wnioski wynikały z twierdzenia o niezupełności. Przyjrzyjmy się treści listu do Schlicka z 1935 roku:

„Jeśli usłyszysz, że ktoś udowodnił, że muszą istnieć niedowodliwe zdania w matematyce...nie masz jak dotąd pojęcia co to pozornie całkowicie jasne należące do „prozy" zdanie mówi. Musisz więc przebrnąć przez dowód od A do Z po to, by przekonać się czego on dowodzi. To znaczy, dopóki nie przeanalizowałeś starannie tego konkretnego dowodu co do ostatniego szczegółu, nie wiesz niczego". Innymi słowy, nie należy dać się ponieść (jak czyni to Penrose) składaniu metafizycznych czy filozoficznych deklaracji zapoznawszy się jedynie z semantyczną wersją twierdzenia o niezupełności, którego sensu zresztą nie zdołamy w pełni zrozumieć, dopóki nie zdefiniujemy precyzyjnie wszystkich podstawowych pojęć (co przeprowadza sam Gödel w swoim oryginalnym tekście, Tarski, z kolei, w swojej matematycznej formalizacji pojęcia 'prawdy'). Zdaniem Wittgensteina kiedy już się owe pojęcia precyzyjnie zdefiniuje, wówczas okazuje się, że owe dowody nie posiadają żadnych *poważnych* filozoficznych implikacji, w każdym razie nie w większym stopniu niż pozostałe dowody matematyczne. Wittgensteinowskie wysiłki zorientowane na wyraźne oddzielenie problemów matematyki od zagadnień filozoficznych czy metafizycznych stają się bardziej czytelne jeśli bliżej przyjrzeć się treści komentarzy zawartych w *Uwagach o podstawach matematyki*, zwłaszcza fragmentom poświęconym Cantorowi i problemowi nieskończoności. W tym kontekście uwagi Wittgensteina na temat twierdzenia Gödla okazują się jedynie szczególnym przypadkiem bardziej ogólnej strategii radzenia sobie z metafizycznym 'zamętem' spowodowanym niechlujnym posługiwaniem się językiem matematyki.

TWIERDZIĆ COŚ NA GRUNCIE MATEMATYKI TO TYLE, CO POSIADAĆ DOWÓD. CO TO ZNACZY BYĆ 'DOWODLIWYM' NA GRUNCIE MATEMATYKI? KRYTYKA TWIERDZENIA GÖDLA JAKO KRYTYKA PEWNEJ FORMALIZACJI.

W jednym z fragmentów *Uwag o podstawach matematyki* pada cytowana już dla potrzeb niniejszych badań wypowiedź Wittgensteina, dodajmy, niezwykle ważna wypowiedź, w której twierdzi on mianowicie, iż rozumowanie Gödla interesuje go jedynie jako narzędzie łatwiające wyjaśnienie tego, „co znaczy w matematyce zdanie w rodzaju: ‘załóżmy, że można to udowodnić’ ”[16]. Dowód, podkreśla Wittgenstein, “ustanawia nowe związki”, “nie stwierdza ich występowania; nie istnieją one bowiem, dopóki dowód ich nie ustanowi”. I dalej: “Na gruncie matematyki jest równie niemożliwe odkrywanie czegokolwiek, co w gramatyce”[17]. “Nowy dowód umieszcza zdanie w ramach nowego porządku”[18] – pisze Wittgenstein. „Dlaczego chcesz ciągle patrzeć na matematykę pod względem znajdowania, a nie działania? – pyta Wittgenstein – Jak wielki musi wpływ mieć na nas to, że posługujemy się określeniami „poprawny” oraz „prawdziwy” i „fałszywy” oraz formą zdania w liczeniu. (Kręcenie i kiwanie głową)’[19]. Jak już wyżej wspomniałam, na Wittgensteinowską koncepcją dowodu niebagatelny wpływ miały idee weryfikacjonizmu, finityzmu, a także koncepcje wypracowane przez Alice Ambrose. Parę spraw w tym miejscu wymaga jednak pewnego wyjaśnienia. Można zasadnie przypuszczać, że o ile na gruncie „środkowej” filozofii Wittgensteina wyrażenia ‘prawdziwy’ i ‘dowodliwy’[20] oraz ‘fałszywy’ i ‘obalalny’ są równoważne[21], to wydaje się, że w przypadku stanowiska 'późnego' Wittgensteina sprawa jest już nieco bardziej problematyczna, tę kwestię mam nadzieję poddać bliższej analizie w toku niniejszych rozważań, w roździale poświęconym Wittgensteinowskiej koncepcji 'dowodliwości' w matematyce. W tym miejscu istotne jest zwrócenie uwagi na fakt, iż pojęcie dowodu formalnego odpowiada nie tyle pojęciu dowodu (którego kryterium poprawności jest pełność, tj. każde zdanie logicznie prawdziwe musi być formalnie dowodliwe) co pojęciu *dowodliwości*, posiadającemu implikacje nie do zaakceptowania na gruncie Wittgensteinowskiej filozofii matematyki. Otóż posługując się pojęciem 'dowodliwości' oddzielamy niejako twierdzenie od jego dowodu, przyjmując, że twierdzenia jako sformułowania

---

[16] UPM, 322 8a.

[17] UPM III, 31 por. także WVC 63:

[18] Por. także LFM 68 & 70 oraz UPM VII, 10

[19] UPM VII, 5

[20] Można zauważyć wyraźny brak konsekwencji w posługiwaniu się terminami: ‘dowiedziony’ i ‘dowodliwy’ w Wittgensteinowskich komentarzach na temat I twierdzenia.

[21] Por. np. R. L. Goodstein [1972], s. 279

twierdzeń istnieją *niezależnie* od swoich dowodów. Ponieważ, zdaniem Wittgensteina twierdzić coś na gruncie matematyki to tyle co posiadać dowód, sformułowania twierdzeń nie mogą istnieć gdzieś *niezależnie* od swoich dowodów. Otóż sam dowód stanowi nie tyle potwierdzenie tego, że wynik jego zastosowania „gdzieś" istnieje, ile że wynik ten nie istnieje dopóty, dopóki dowód go nie ustanowi, można zatem powiedzieć, iż stwarzając nowe związki pojęciowe dowód niejako przekształca gramatykę naszego języka. Dlatego sformułowanie twierdzenia bez znajomości jego dowodu, można, zdaniem Wittgensteina, traktować najwyżej jako *sui generis* sugestię co do tego, w jaki sposób należy owego dowodu poszukiwać. W tym kontekście formalizacja – tj. podstawowa metoda, którą posługuje się technika Gödla, jeśli rozumieć ją jako abstrahowanie od znaczenia przy jednoczesnym wego znaczenia przenoszeniu czy też *zachowywaniu* w toku przechodzenia od pierwotnego pojęcia do jego formalizacji, jest tym, co jak wiemy kwestionował Wittgenstein.

Istnieją uzasadnione podstawy, by przypuszczać, iż przyjęcie przez Wittgensteina założenia, iż semantyka jest do pewnego stopnia „niewyrażalna"[22], natomiast język ma charakter medium uniwersalnego, mogło stanowić jeden z bezpośrednich powodów identyfikacji przez niego pojęć „prawdziwy" i „dowodliwy" (na gruncie *Principia Mathematica*). "Czy w systemie Russella istnieją zdania prawdziwe, których nie da się udowodnić w tym systemie? – Co nazywamy zdaniem prawdziwym w systemie Russella? Co to znaczy, że jakieś zdanie jest 'prawdziwe'? 'p' jest prawdziwe = p. (To jest odpowiedź). Tak więc chcemy np. zapytać: w jakich okolicznościach stwierdza się jakieś zdanie?"[23] – dodaje Wittgenstein w *Uwagach o podstawach matematyki*. Gwoli ścisłości należy dodać, że identyfikacja ta nie sprowadza się li tylko do uznania równozakresowości predykatów 'prawdziwy' i 'dowodliwy', ale wskazuje ponadto na ich równoznaczność, tj. identyczność nie tylko zakresów, ale również pojęć. Wittgenstein mógłby zatem powiedzieć (na temat Gödlowskiego zdania P czy też innego dowolnego zdania matematyki), że ponieważ „w

---

[22] Właśnie raczej „niewyrażalną" niż „niemożliwą".

[23] UPM, s.187.

matematyce proces i wynik są wzajemnie równoważne”[24], to powinno ono uzyskiwać znaczenie *na mocy* własnego dowodu. To, co – zdaniem Wittgensteina – należy zatem wyjaśnić, czy też – ściśle biorąc – rozjaśnić, jest sposób użycia (a więc ostatecznie znaczenie) wyrażenia „być dowodliwym”. Jeśli chcielibyśmy jednak, mimo wszystko, nadal uparcie obstawać przy założeniu, że zdanie „P jest niedowodliwe” zostało udowodnione, to pozostawałoby nam dokonać wyboru spośród następujących alternatyw[25]:

(a) ktoś się pomylił – w tym wypadku powinien przynajmniej w jakimś stopniu zmodyfikować przyjmowaną przez siebie interpretację wyrażenia „być niedowodliwym”;

(b) ktoś faktycznie dowiódł P, lecz w *innym* systemie matematycznym lub powiedzmy w systemie fizyki. Ten przypadek Wittgenstein uznaje za nieproblematyczny, ponieważ z pewnością istnieją należące do innych systemów zdania prawdziwe, które nie są dowodliwe w PM. Podobnie jak można wskazać prawdziwe zdania z systemu PM, które nie są dowodliwe „poza nim”;

(c) jeśli po udowodnieniu (w ramach naszego wyjściowego systemu) zdania P, otrzymamy sprzeczność, to nie musi to – zdaniem Wittgensteina – być przyczyną pojawiających się w naszym systemie nieprawidłowości. Wittgenstein sądzi, iż można w tym przypadku przypuszczać, iż „zasada niesprzeczności jest po prostu w tym konkretnym wypadku fałszywa”. Wittgensteinowska krytyka możliwości (c) opiera się na porównaniu P do zdania kłamcy (K). Porównanie to jest jednak problematyczne, ponieważ *per analogiam* można by np. w ten sam sposób zinterpretować zdanie K jako mówiące nie tyle, że „K jest niedowodliwe”, ile raczej że „K nie jest prawdziwe”. Wówczas jednak znowu, w świetle przyjętej interpretacji, tego rodzaju rozróżnienie z punktu widzenia Wittgensteina byłoby zupełnie bez znaczenia[26].

Jak więc widać, krytyka Wittgensteina przyjmuje skrajną postać dyskwalifikacji zdań typu P jako całkowicie bezużytecznych. „To tak,

---

[24] UPM, dod. I, par. 82; por. także TLP, 6.1261.

[25] UPM, dod. III, par. 5-9, cz. VII, par. 18-19.

[26] Z powodu ‘zdania kłamcy’ prawdy arytmetyki nie mogą być ‘zdefiniowane’ wewnątrz arytmetyki Peano (PA).

jakby ktoś z pewnych zasad dotyczących form przyrodniczych i stylu w budownictwie wywnioskował, że na Mount Everest, gdzie nikt nie może mieszkać, trzeba postawić pałacyk w stylu barokowym"[27] – zauważa w *Uwagach o podstawach matematyki.* Wittgensteinowska argumentacja nie wydaje się być jednak całkowicie rozstrzygająca, przede wszystkim dlatego, że sam fakt „nieposiadania" przez pewne zdanie zastosowania nie jest wystarczającym powodem jego dyskwalifikacji[28]. Przepro-wadzona przez Wittgensteina *dekonstrukcja* drugiego twierdzenia Gödla – którą jednak nie będę się tu zajmować – wydaje się nieco bardziej kłopotliwa, ponieważ, jak zauważa Wittgenstein: „matematyczne problemy tak zwanych podstaw tak samo nie leżą, naszym zdaniem, u podstaw matematyki jak na namalowanej skale nie wznosi się namalowany zamek"[29]. To, na co należy zwrócić w tym miejscu uwagę jest istotny fakt, iż Wittgensteinowska koncepcja dowodu matematycznego ma związek z ideą, że matematyka ma charakter *normatywny*. Wittgenstein przeprowadza na tę okoliczność ostre rozróżnienie między dowodem logicznym i matematycznym a dowodem "*w* logice i matematyce". Dowód 'logiczny' lub matematyczny np. w inżynierii wyprowadza prawdziwość danego wniosku empirycznego na podstawie prawdziwości empirycznych przesłanek zgodnie z tym, co Wittgenstein uważa za reguły przekształcania symboli. Z kolei 'dowód *w* logice' lub matematyce nie tyle wywodzi prawdziwość jednego zdania z prawdziwości innego, ile wykazuje, że dane połączenie znaków jest tautologią lub równaniem, to znaczy należy do logiki *resp*. matematyki. Jak więc widać Wittgensteinowskie 'pominięcie' twierdzenia Gödla, choć nie ma charakteru formalnego, jest jednak przeprowadzone w wyjątkowo eleganckim stylu.

Przy okazji niniejszych rozważań na temat Wittgensteinowskiej teorii dowodu, pozwolę sobie przypomnieć niezwykle kluczowy w kontekście omawianego problemu fakt, że twierdzenie o niezupełności posiada

---

[27] UPM, dod. III:19.

[28] Czy „nie mogłoby'' mieć ono zastosowania (być może wynalezionego), w innej grze językowej?

[29] Stanowisko Wittgensteina w tej sprawie jest zaskakujące, jako że z grubsza utrzymuje on, że, "wszystko czym dysponujemy to odwzorowanie, funkcja projektująca reguły jednej gry na reguły innej gry" (Wittgenstein, PR, s. 335).

dwie wersje: syntaktyczną i semantyczną. Pierwsza z nich stwierdza, że jeśli arytmetyka Peano (PA) jest niesprzeczna, to jest niezupełna, ponieważ istnieją zdania arytmetyki A i $\neg A$ takie, że oba nie są dowodliwe w PA, natomiast druga wersja głosi, że jeśli PA jest niesprzeczna, to istnieją prawdziwe, lecz niedowodliwe zdania arytmetyki, czyli krótko mówiąc, że: „Istnieją prawdziwe i niedowodliwe zdania arytmetyki" (Bell nazywa je „słabym twierdzeniem Gödla o niezupełności"). Gödel poświęcił wersji semantycznej wprowadzający paragraf w swoim tekście z 1931 roku, jednak, jak sądzą niektórzy komentatorzy[30]choć semantyczna wersja dowodu jest prostsza, Gödel niechętnie odnosił się do wszelkich prób jej nadużywania, ponieważ w dowodzie syntaktycznym drugie twierdzenie 'szło' w łatwiejszy sposób[31]. To, co należy w tym miejscu odnotować to fakt, iż semantyczna wersja pierwszego twierdzenia natychmiast sugeruje, że istnieje *bardzo głęboki związek* między niezupełnością i niedowodliwością prawdy w arytmetyce formalnej. Wittgenstein, jak wiadomo odnosił się mocno sceptycznie wobec przeprowadzania tego rodzaju implikacji, podkreślając wielokrotnie, iż **w matematyce *wszystko* jest algorytmem [i syntaksą] i *nic* nie jest znaczeniem [semantyką]**; Wydaje się, że zarówno Floyd, jak i Shanker zgodziliby się z tym, że każda filozoficzna interpretacja twierdzenia matematycznego uchodziłaby w oczach Wittgensteina po prostu za nadużycie. „Dowód formalny dowodzi tylko tego, czego dowodzi", pisze Wittgenstein podkreślając *explicite*, iż „problemów, które nas niepokoją, nie jest w stanie rozwiązać coś, co jest częścią matematyki".

Resume: **„Gödel konfrontuje nas z nową sytuacją", zauważa Wittgenstein 2 stycznia 1939 roku**[32]: "Cóż na ten temat powiemy?"[33]

---

[30] Por. Bays (2004),

[31] Por. Wójtowicz, K.: *O nadużywaniu twierdzenia Gödla w sporach filozoficznych* http://www.opoka.org.pl/biblioteka/F/FL/ograniczenia_godla.html

[32] MS 121, 84r1.

[33] Por. UPM VII, 22; 3 lipca 3, 1941, MS 124, 95r): Można zasadnie spytać, na czym polega doniosłość dowodu Gödla dla naszej pracy. Albowiem problemów, które *nas* niepokoją, nie jest w stanie rozwiązać coś, co jest częścią matematyki. – Odpowiedź brzmi: interesuje nas *sytuacja*, w jakiej umieszcza nas taki dowód. "Co mamy teraz powiedzieć?" – Oto nasz motyw przewodni'". por. (MS 163,39v–40r, 8lipca 1941r.): „Interesuje mnie nie dowód Gödla, ale możliwość, którą Gödel uświadamia nam w toku tej dyskusji. Dowód Gödla stwarza trudność,

“Nie należy, rzecz jasna, działać pochopnie kiedy zastanawiamy się nad tym, co chcemy powiedzieć. W szczególności nie należy działać pochopnie kiedy chcemy powiedzieć to, co brzmi w najwyższym stopniu sensacyjnie”, ponieważ “sytuację tę jest trudniej ocenić niż może się wydawać”. Należy więc postępować ostrożnie unikając nie przemyślanych działań. W tej nowej, delikatnej sytuacji, zdaniem Wittgensteina, zachowano się niewłaściwie, nie tylko sam Gödel przedstawił swoje wyniki w sposób bezkrytyczny, ale również inni zbyt pochopnie zinterpretowali je w 'typowy' sposób. Można zapytać zatem dlaczego – biorąc pod uwagę tak krytyczny stosunek wobec twierdzenia Gödla – sam Wittgenstein nie przeprowadził skrupulatnej analizy tej problematycznej ‘sytuacji’, którą stwarza twierdzenie Gödla, wielokrotnie podkreślając, iż „problemów, które nas niepokoją, nie jest w stanie rozwiązać coś, co jest częścią matematyki”. Aby zrozumieć sedno Wittgensteinowskiego stanowiska kluczowe jest przyjrzenie się epistemologicznym założeniom programu Hilberta, które - zdaniem Wittgensteina – w pewnym stopniu rozjaśniają ów budzący irytację Wittgensteina osobliwy filozoficzno-matematyczny charakter twierdzenia Gödla. Jak już wcześniej próbowałam pokazać źródeł Wittgensteinowskiej krytyki platonistycznej interpretacji twierdzenia Gödla należy szukać w przyjętym przez niego założeniu, iż problem filozoficzny powinno się rozwiązywać jedynie w sposób filozoficzny.

Można na gruncie stanowiska Wittgensteina wyróżnić dwie zasadnicze kwestie, które trzeba wziąć pod uwagę w toku przeprowadzanych tu rozważań. Otóż, aby zrozumieć czego tak naprawdę dowodzi dowód Gödla, musimy rozważyć zarówno filozoficzną podstawę problemu Hilberta, jak i matematyczną treść jego rozwiązania w postaci wyniku Gödla. Jednym z głównych powodów tak gwałtownej reakcji Wittgensteina na Gödlowski dowód był fakt, iż wynik Gödla posłużył do umocnienia założeń, których przyjęcie, jego zdaniem, doprowadziło do kryzysu tzw. podstaw matematyki. „Można zasadnie spytać, na czym polega doniosłość dowodu Gödla dla naszej pracy – pyta Wittgenstein –

---

która musi pojawić się w bardziej podstawowym sensie. (I w tym właśnie największa zasługa Gödla dla filozofii matematyki i zarazem powód, dla którego to nie sam dowód budzi zainteresowanie)“.

albowiem problemów, które *nas* niepokoją, nie jest w stanie rozwiązać coś, co jest częścią matematyki. – Odpowiedź brzmi: interesuje nas *sytuacja,* w jakiej umieszcza nas taki dowód. "Co mamy teraz powiedzieć?" – Oto nasz motyw przewodni'"[34].

Owa zwięzła, jak sądzą niektórzy, krytyka twierdzenia Gödla przedstawiona zwłaszcza w części VII *Uwag o podstawach matematyki* jest nie tyle przesłanką, ile raczej skróconym wnioskiem, będącym wynikiem wieloletnich rozważań Wittgensteina na ten temat. Wittgenstein sugeruje mianowicie, iż problem z dowodem Gödla polega nie tyle na kłopotliwych wnioskach, które z Hilbertowskich założeń wyciągnął Gödel, ile na osobliwym charakterze pytania, na które Hilbert próbował odpowiedzieć za pomocą narzędzi 'metamatematycznych". „Interesuje mnie nie tyle dowód Gödla, ile możliwość, którą Gödel uświadamia nam w toku tej dyskusji. Dowód Gödla stwarza trudność, która musi pojawić się w bardziej podstawowym sensie. (I w tym właśnie największa zasługa Gödla dla filozofii matematyki i zarazem powód, dla którego to nie sam dowód budzi zainteresowanie)" – oświadcza Wittgenstein w jednym ze swoich komentarzy. To właśnie owa 'trudność', która stanowi sedno platońskiej interpretacji twierdzenia Gödla, jest źródłem Wittgensteinowskich obaw, innymi słowy przekonanie Gödla, iż udowodnił on istnienie prawdziwych, ale niedowodliwych zdań matematycznych można uznać za najbardziej rażący wyraz zamętu pojęciowego związanego z publikacją twierdzenia o niezupełności. Zdaniem Wittgensteina jest to jednak tak naprawdę jedynie konsekwencją pewnego poważniejszego problemu. Jeśli wyeliminujemy ową kłopotliwą przesłankę, wówczas natychmiast pozbędziemy się ewentualnych metafizycznych konsekwencji twierdzenia Gödla. W tym, być może tkwi siła Wittgensteinowskiej interpretacji twierdzenia o niezupełności, iż rozprawia się on z nim krótko, i to właśnie do pewnego stopnia to 'pobieżne' potraktowanie tematu w znacznym stopniu usposobiło doń negatywnie logików matematycznych, dla których najtrudniejsza do zaakceptowania była właśnie Wittgensteinowska sugestia, iż twierdzenie Gödla ma *niewielki* bezpośredni wpływ na filozoficzne problemy kryzysu w podstawach matematyki.

---

[34] UPM VII § 22.

Interpretacja ta w pewnym sensie jednak bagatelizuje to, co Wittgenstein uważał za głębokie implikacje dowodu Gödla. Z perspektywy Wittgensteina bowiem znaczenie twierdzenia Gödla dla filozofii matematyki polega nie tyle na jego roli w obaleniu, ile raczej w *reductio ad absurdum* programu Hilberta. Jeśli przyjęcie twierdzenia Gödla stawia nas w sytuacji dylematu sceptycznego, powiedziałby Wittgenstein, to może to tylko znaczyć, że przesłanki, które znalazły się u podstaw tej linii rozumowania same muszą być w gruncie rzeczy niezrozumiałe. Ponieważ, jak zauważa w innym miejscu: „sceptycyzm nie jest (stanowiskiem) niepodważalnym, ale (jest) oczywistym nonsensem jeśli próbuje wątpić tam, gdzie nie może zostać postawione żadne pytanie', aby w zapiskach z 28 grudnia 1938 roku zauważyć z kolei, iż: "Gödel pokazuje nam niejasność pojęcia 'matematyki', na co wskazuje fakt, iż matematykę uznawano za system"[35]. Istotnie, jeśli przed pojawieniem się w 1931 roku publikacji Gödla, wielu lub większość matematyków i filozofów, m.in. Hilbert na ogół mocno wierzyła, iż matematyka jest systemem zupełnym, czy też można uczynić ją pełną, to wyniki Gödla – wykazujące, że nie może istnieć żaden zupełny system teorii liczb oraz, że nie może istnieć żaden zupełny system matematyki klasycznej – ostatecznie pozbawiły ich resztek złudzeń, skłaniając do zmiany perspektywy w sprawie takich zagadnień jak pojęcie dowodu matematycznego czy prawdy matematycznej[36]. Wittgenstein porusza tę kwestię w zapi-

---

[35] MS 121, 76r; 28 grudnia 1938r., por. MS 121, 27r; 27 maja 1938r., gdzie Wittgenstein pyta: "A co z twierdzeniem, że nie istnieje system wszystkich systemów, będącym w jakimś sensie podobnym do twierdzenia mówiącego, że nie istnieje największa liczba kardynalna?" W MS 121, 28r; 27 maja, 1938 roku, Wittgenstein dodaje: "Jest to bowiem niezwykle istotne pytanie: jakie jest zastosowanie tego (nowego) pojęcia z dziedziny teorii liczb *poza* matematyką. Nie tylko liczby mogę bowiem policzyć za pomocą 1, 2, 3, 4, ale także jabłka & gdzie teraz numer mógłby pojawić się *wyłącznie w* zdaniach matematycznych & w żadnych innych, lub nie wiemy jaką rolę mogłoby ono grać poza jego rolą w zdaniach matematycznych, wówczas wskazuje to na brak jasności z naszej strony").

[36] *Per analogiam* zauważa Wittgenstein w UPM II, 33 Cantorowska procedura przekątniowa pokazuje, że "na osi liczb znajdują się *rozmaite systemy* punktów niewymiernych", ale nie istnieje "*żaden system* liczb niewymiernych", oraz "nie istnieje również *żaden nadsystem*, żaden '*zbiór* liczb niewymiernych' charakteryzujący się nieskończonością wyższego rzędu", aby 4 lutego 1940 roku zadać kluczowe dla swoich rozważań pytanie: „A co gdyby ktoś powiedział, iż

skach z 11 lipca 1941 roku: “Mógłbym powiedzieć: twierdzenie Gödla dostarcza nam bodźca do zmiany perspektywy, z pozycji której dotąd postrzegaliśmy matematykę. Mimo, iż nie obchodzi nas to, czego on dowodzi, to musimy jedna ‚zmierzyć się z tą matematyczną *metodą dowodzenia*”,[37] by następnie dodać, iż : “Tym, co mnie interesuje nie jest twierdzenie Gödla, ale możliwości, na które Gödel kieruje naszą uwagę za sprawą swojej dyskusji”[38]. Sednem tej argumentacji jest zatem Wittgensteinowskie przekonanie, że ’problemów, które nas niepokoją, nie jest w stanie rozwiązać coś, co jest częścią matematyki’, twierdzenie to posiada przynajmniej dwa istotne aspekty. Po pierwsze natura problemów, które nas niepokoją (m.in. problem ‘pewności’ prawdy matematycznej) jest filozoficzna, oraz po drugie, zgodnie z Wittgensteinowskim postulatem metodologicznym formułującym warunek wyraźnego oddzielenia dyskursu matematycznego i filozo-ficznego, interpretacja twierdzenia Gödla powinna zostać jednak ogra-niczona do dziedziny matematycznej.

Chociaż, istotnie publikacja twierdzenia o niezupełności wywołała małą rewolucję w uporządkowanym świecie logiki matematycznej, to, należy podkreślić, iż w przypadku Wittgensteina owa zmiana perspektywy nie była konieczna. Między innymi dlatego, iż już wcześniej utrzymywał on znany pogląd, zgodnie z którym matematyka stanowi swego rodzaju *zbieraninę technik i rachunków*, z których każdy niejako wymyślany jest systematycznie 'krok po kroku'.

“matematyka stanowi klasę dociekań, nie zaś klasę zdań?”. Por. także MS 117, 151–152, Czy prowadzi to do konkluzji, że – powiedziałoby się w teorii mnogości – jest ‘więcej’ dociekań matematycznych niż matematycznych zdań systemu? Czy ma to jakiś związek z twierdzeniem Gödla? Jeśli tak, może być to jedynie luźny związek’.

[37] MS 163, 40r, July 11, 1941

[38] Por. MS 163, 37v, 8 lipca 1941r.

BIBLIOGRAFIA

Ambrose, A., Lazerowitz, M. (red.): 1972, *Ludwig Wittgenstein: Philosophy and Language.* George Allen and Unwin, London.

Bays, T.: *On Putnam and his Models*, „The Journal of Philosophy" 98 (2001), s. 33-350.

Berto, F.: *The Gödel Paradox and Wittgenstein's Reasons*, „Philosophia Mathematica" 17 (2009), No. 2, s. 208-219.

– *There is Something about Gödel* (w przygotowaniu).

Bordum, A.: *The Theory of Positive Self-Reference,* MPP Working Paper, WP 10/2002, Copenhagen: Department of Management, Politics and Philosophy, Copenhagen Business School.

Chihara, Ch.: *Wittgenstein's Analysis of the Paradoxes, in his 1939 "Lectures on the Foundations of Mathematics"*, „Philosophical Review" 86 (1977), s. 365-381.

Dummett, M.: *Truth and Other Enigmas*, Cambridge, Mass.: Harvard University Press 1978

Floyd, J.: *On Saying What You Really Want to Say: Wittgenstein, Gödel, and the Trisection of the Angle,* [w:] J. Goodstein, R. L. (1957). "Critical Notice of Remarks on the Foundations of Mathematics". Mind 66 (264), 549–553.

Goodstein, R. L. (1972). "Wittgenstein's Philosophy of Mathematics". Printed in A. Ambrose and Hintikka, J. (red.), *From Dedekind to Gödel: Essays on the Development of the Foundations of Mathematics*, Boston: Kluwer 1995.

– *Prose versus Proof: Wittgenstein on Gödel, Tarski and Truth*, „Philosophia Mathematica" 9 (2001), s. 280–307.

– *Wittgenstein on 2, 2, 2...: The Opening of Remarks on the Foundations of Mathematics*, „Synthese" 1991, s. 143-180.

– Putnam, H.: *A Note on Wittgenstein's Notorious Paragraph about the Gödel theorem*, „The Journal of Philosophy" 97 (2000), s. 624-632.

Krajewski, S.: *Twierdzenie Gödla i jego filozoficzne interpretacje*, Warszawa: IFiS PAN 2003.

Rodych, V.: 1997, *Wittgenstein on Mathematical Meaningfulness, Decidability, and Application*, Notre Dame Journal of Formal Logic 38(2), 195-224.

Rodych, V.: 1999a, *Wittgenstein on Irrationals and Algorithmic Decidability*, Synthese 118(2), 279-304.

Rodych, V.: 2000, *Wittgenstein's Critique of Set Theory*, The Southern Journal of Philosophy 38(2), 281–319.

Shanker, V.A.: *Ludwig Wittgenstein: Critical Assessments*, Routledge 1997.

Shanker, S.: *Wittgenstein Remarks on Gödel's Theorem*, [w:] Gödel's Theorem in Focus, London: Croom Helm 1988.

Tarski, A: *Pojęcie prawdy w językach nauk dedukcyjnych*, Warszawa 1933.

– *Pisma logiczno-filozoficzne, t. I: Prawda*, Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN 1995.

– *Pisma logiczno-filozoficzne, t. II: Metalogika*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2001.

Waismann, F.: 1979, *Wittgenstein and the Vienna Circle*, red. i tłum B. F. McGuinness, Basil Blackwell, Oxford; (w niniejszej pracy jako 'WVC')

Wittgenstein L.: *Logisch-philosophische Abhandlung*, Frankfurt: Suhrkamp 1963 (pol. *Traktat logiczno-filozoficzny* tł. B. Wolniewicz. Warszawa: PWN 1970 w niniejszej pracy jako TLP

– *Dociekania filozoficzne*, wyd. II, tł. B. Wolniewicz, Warszawa: PWN 1999, w niniejszej pracy jako DF.

– *Kartki*, tł. S.Lisiecka, Warszawa: Wyd. KR 1999.

– *Lectures on the Foundations of Mathematics*, red. C. Diamond, Cambridge: Harvester Press 1976 w niniejszej pracy jako LFM

– *Philosophische Grammatik*, Frankfurt am Main: Suhrkamp 1984 w niniejszej pracy jako PG

– *Remarks on the Foundations of Mathematics*, ed. by G.E. von Wright, R. Rees and G.E.M. Anscombe, transl. by G.E.M. Anscombe, Cambridge: MIT 1956 (pol. *Uwagi o podstawach matematyki*, tł. M. Poręba, Warszawa: Spacja 2001 w niniejszej pracy jako UPM

– *Philosophical Remarks* [1929-1939], red. R. Rhees, Oxford: Blackwell 1975, w niniejszej pracy jako PR

Wittgenstein, L.: 1958, The Blue and Brown Books, Basil Blackwell, Oxford.

Wittgenstein, L. : 1978, Philosophical Investigations, Basil Blackwell, Oxford, [1953]); translated by G. E. M. Anscombe;

Wittgenstein, L.: 1975, Philosophical Remarks, Basil Blackwell, Oxford; (w niniejszej pracy jako ‘PR’).

Wittgenstein, L.: 1974, Philosophical Grammar, Basil Blackwell, Oxford, Rush Rhees (ed.); translated by Anthony Kenny; (w niniejszej pracy jako‘PG’).

Wittgenstein, L.: 1976, Lectures on the Foundations of Mathematics, Ithica, Cornell University Press, Ithica, N.Y., Cora Diamond (ed.); (w niniejszej pracy jako ‘LFM’. Wittgenstein, L.: 1978, Remarks on the Foundations of Mathematics, second edition, Basil Blackwell, Oxford [1956], edited by G. H. von Wright, R. Rhees and G. E. M. Anscombe; (w niniejszej pracy jako ‘UPM’. Wittgenstein, L.: 1998-2000, Wittgenstein’s *Nachlaß*: The Bergen Electronic Edition, Oxford University Press, Oxford, w niniejszej pracy jako resp. MS 117 (1937–38, 1940) and MS 121 (1938–39) are in Volume I; MS 124 (1941, 1944) is in Volume III; MSS 157 (1937), 161 (1939) and 163 (1941) are in Volume IV.

Wójtowicz, K.: *O nadużywaniu twierdzenia Gödla w sporach filozoficznych*

http://www.opoka.org.pl/biblioteka/F/FL/ograniczenia_godla.html

Wójtowicz, K.: "O matematyce i filozofii matematyki", w: ZAGADNIENIA FILOZOFICZNE W NAUCE XXIII / 1998, s. 53-66.