EDUKACJA FILOZOFICZNA
Vol. 58 2014

PAWEŁ STACEWICZ
Politechnika Warszawska

O EDUKACJI MATEMATYCZNO-FILOZOFICZNEJ NA PRZYKŁADZIE PROJEKTU „ARCHIPELAG MATEMATYKI"

Wprowadzenie. Za pośrednictwem niniejszego artykułu chciałbym podzielić się ze środowiskiem filozofów swoim doświadczeniem w filozoficznie wspomaganej popularyzacji matematyki. Doświadczenie to zawdzięczam intensywnemu udziałowi w projekcie dydaktycznym Archipelag Matematyki, który był realizowany w latach 2011-2014 w Politechnice Warszawskiej, a miał na celu popularyzację matematyki wśród uczniów szkół średnich[1].

Finalnym produktem w/w projektu jest internetowe i multimedialne zarazem środowisko poznawania matematyki, a także jej różnorodnych powiązań z innymi dziedzinami (w tym filozofią). Na środowisko to składają się elementy tak różnorodne, jak prezentacje, animacje, filmy, audycje radiowe, mini-gry, wywiady i czaty. Z punktu widzenia użytkownika wszystkie one tworzą **edukacyjną grę** internetową, której główny cel polega na przyswajaniu coraz większej liczby matematycznych wiadomości i umiejętności (czego wymiernym wyrazem są punkty i odznaczenia). W trakcie gry rywalizują ze sobą nie tylko pojedynczy uczniowie, ale również całe szkoły. Istotnym elementem rywalizacji jest aktywna rozbudowa świata gry, czyli dodawanie doń własnych materiałów.

W niniejszym artykule skupię się na tych aspektach Archipelagu Matematyki, które mają charakter matematyczno-filozoficzny (a jest ich sporo). Po pierwsze, omówię zastosowaną w projekcie ogólną metodę **filozoficznego wspomagania** edukacji matematycznej. Po drugie zaś, wychodząc z założenia, że koncepcje ogólne najlepiej poznaje się na

[1] Mówiąc dokładniej, projekt był realizowany na Wydziale Matematyki i Nauk Informacyjnych PW, a uczestniczyli w nim nie tylko pracownicy tego Wydziału, lecz również osoby i firmy z zewnątrz (w tym nauczyciele szkolni i uczniowie). Pomysłodawcą i kierownikiem całego przedsięwzięcia był prof. Tadeusz Rzeżuchowski.

przykładach, przedstawię konkretne, **autorskie materiały** z projektu[2]. Przykład pierwszy dotyczy prekursorskich poglądów Heraklita na zmienność – opisywaną dziś m.in. w ramach analizy matematycznej; przykład drugi służy objaśnieniu pitagorejsko-leibnizjańskiego hasła „*że wszystko jest liczbą*"; przykład trzeci jest poświęcony frapującemu po dziś dzień, a dostrzeżonemu po raz pierwszy przez Alana Turinga, zagadnieniu liczb nieobliczalnych. Mam nadzieję, że przedstawione materiały okażą się interesujące nie tylko jako przykład obrazujący ideę projektu, lecz także jako pewna niestandardowa próba **edukacji filozoficznej**.

1. ARCHIPELAG MATEMATYKI

1.1. Koncepcja wirtualnego świata

Przystępując do realizacji projektu „Archipelag Matematyki", postawiono sobie za cel stworzenie **wirtualnego świata** o takiej samej nazwie jak sam projekt – świata, w którym mogłaby się toczyć multimedialna matematyczna gra. Wybierając taką formę popularyzacji, postanowiono wyjść na przeciw upodobaniom współczesnej młodzieży, która coraz częściej (i w sposób coraz bardziej naturalny) komunikuje się, bawi, a także uczy za pośrednictwem Internetu. Komputerowy świat Archipelagu istnieje właśnie w Internecie, a jego adres to: www. archipelagmatematyki.pl.

Ujmując rzecz strukturalnie i ogólnie, wirtualne środowisko Archipelagu składa się z sześciu odrębnych wysp, reprezentujących różne działy matematyki: Wyspy Liczb, Wyspy Algebry, Wyspy Geometrii, Wyspy Logiki z Teorią Mnogości, Wyspy Analizy oraz Wyspy Matematyki Dyskretnej; ponadto zaś wchodzi w jego skład przeznaczony dla debiutantów Atol Start. Chociaż każda z wysp stanowi osobną krainę (i graficznie, i treściowo), to na każdej z nich znajdują się podobne **miejsca**, w kló-rych gracze zyskują dostęp do materiałów określonego typu. Wymieńmy dla przykładu: w Akademii są dostępne rozmaite kursy i prezentacje, w Kinie – fabularyzowane filmy o matematyce i matematykach, w Pawilonie Osobliwości – animowane materiały o niezwykłych faktach matematycznych (takich jak istnienie liczb nieobliczalnych, zob. pkt 2.3).

---

[2] Autor artykułu był w zespole projektu metodykiem odpowiedzialnym za opracowywanie i recenzowanie treści z zakresu logiki, teorii mnogości oraz analizy matematycznej. Z racji swojego filozoficznego wykształcenia wprowadził do projektu sporo materiałów z pogranicza matematyki, filozofii i nauk humanistycznych.

Podstawowym celem uczestników gry (nazywanych odkrywcami Archipelagu) jest poznawanie w/w miejsc i „wydobywanie” z nich kolejnych porcji matematycznej wiedzy – co oczywiście, pod warunkiem zaliczenia odpowiednich testów, przekłada się na **korzyści punktowe**. Zgodnie z regułami gry nie wszyscy jej uczestnicy mają jednaki dostęp do wszystkich miejsc oraz ich matematycznej zawartości. O tym, co dana osoba może poznać (przeczytać, obejrzeć, spróbować rozwiązać etc…) decyduje, po pierwsze, jej konto punktowe, po drugie, jej aktualna ranga, a po trzecie, liczba i typ już zaliczonych materiałów. Technicznie rzecz biorąc, funkcję ograniczonego dostępu zrealizowano, przypisując każdej jednostce treści specyficzne warunki wejścia.

Odkrywając kolejne wyspy i miejsca, zapoznając się z kolejnymi materiałami, zdobywając kolejne punkty (*etc*…), gracze spotykają na swej drodze rozmaite **postaci**. Obok krain i miejsc stanowią one charakterystyczny element wirtualnego świata. Należą do nich gubernatorowie, ambasadorowie, profesorowie wizytujący (jak przybywający z realnego świata prof. Witold Marciszewski), duchy wielkich uczonych z przeszłości (jak Heraklit czy Arystoteles), ale także postaci całkiem zwyczajne (jak reporterka radiowa, starszy szeregowy czy pies Pimpek). Każda z nich wnosi do gry swoisty koloryt. Na przykład: Arystoteles jest duchem dość agresywnym i złośliwym, a ponadto przewrażliwionym na punkcie krytyki jego „wiekopomnych” dokonań.

Podkreślić trzeba, że wirtualny świat Archipelagu ma charakter **otwarty**. Dostatecznie zaawansowani gracze mogą dodawać doń własne treści; a ponadto mają możliwość oceniania i komentowania już istniejącej zawartości. Podobnie jak w przypadku uprawnień dostępu do gotowych materiałów, przywileje ich dodawania są zdobywane stopniowo, w trakcie coraz bardziej rozległej i aktywnej penetracji kolejnych wysp. Czynnikiem sprzyjającym aktywnej rozbudowie świata gry są różnego rodzaju konkursy: na zadania, prezentacje, amatorskie filmy czy minigry. Efektem jednego z nich jest obowiązująca na Archipelagu **klasyfikacja graczy**. Zgodnie z nią archipelagowych wędrowców dzieli się na: debiutantów, poszukiwaczy, pionierów, przewodników i wielkich odkrywców. Tym ostatnim, rzecz jasna, przyznano najwięcej uprawnień do rozbudowy Archipelagu.

Omawiając koncepcję wirtualnego świata, nie sposób pominąć kwestii, która ma bezpośredni związek z **filozofią**. Chodzi o zakorzeniony w filozofii platońskiej pogląd, że prócz zwykłego świata rzeczy dostępnych zmysłowo, istnieje (prawdziwie istnieje) idealny, ponadczasowy i niezależny od człowieka **świat matematycznych bytów**. Poznawczy dostęp do jego zawartości miałby zapewniać czysty umysł. Koncepcja wirtualnego świata matematyki może naprowadzić umysł gracza na ten właśnie pogląd, a „logika" owego naprowadzenia jest następująca: skoro obok zwykłego świata, w którym żyjemy, istnieje wytworzony przez nas wirtualny świat matematycznego Archipelagu, to być może istnieje jeszcze świat trzeci, mieszczący w sobie idealne odpowiedniki treści zamieszczanych w Archipelagu. Jeśli uczeń uzna tę myśl za swoją, to być może – idąc tropem tak wybitnych uczonych jak Kurt Gödel czy Jan Łukasiewicz – zyska dodatkową, filozoficzno-światopoglądową, motywację do poznawania matematyki[3].

1.2. Matematyczna zawartość Archipelagu

O zakresie tematycznym Archipelagu informują dobrze nazwy kolejnych wysp: Analizy, Algebry, Geometrii *etc.* (zob. pkt 1.1). Nie wnikając w szczegółowe sformułowania tematów, spróbujmy spojrzeć na zawartość matematyczną Archipelagu syntetycznie, ujawniając ogólną, **metodologiczną strukturę** materiałów[4].

Jej niewątpliwy trzon stanowią **twierdzenia matematyczne**, a także zawarte w nich pojęcia i uzasadniające ich prawdziwość dowody (przy czym zgodnie z powyższym wyróżnieniem elementem centralnym są twierdzenia). Jako reprezentatywny przykład można wskazać twierdzenie Cantora o zbiorze potęgowym, z którym są sprzężone – na zasadzie koniecznego dopełnienia samego dowodu – wstępne kursy o podstawach teorii mnogości i liczne materiały (animacje, audycje, filmy) o pojęciu nieskończoności. Dopowiedzieć trzeba, że prezentacje samych dowodów mają najczęściej charakter półformalny, na przykład fabularyzowany.

Elementem wspomagającym właściwe rozumienie udowadnianych twierdzeń są materiały poglądowe, obrazujące historyczne oraz intuicyjne **źródła** matematycznych pojęć. I tutaj właśnie, na poziomie odsła-

---

[3] Motyw trzech światów jest obecny w świecie Archipelagu na atolu Start, pod postacią kursu „Matematyka a świat realny". Ani tu, ani tam nie sugerujemy jednak, że istnienie „platońskiego" świata matematycznych bytów jest pewne; piszemy tylko o możliwości przyjęcia takiego przekonania – przekonania, które podziela wielu zawodowych matematyków (podziela w sposób niewątpliwie korzystny dla rozwoju matematyki).

[4] Zgodnie z przeznaczeniem projektu stopień trudności prezentowanych materiałów jest dostosowany raczej do możliwości uczniów szkół średnich (i to tych, którzy nie wykazują wybitnych zdolności matematycznych). Mimo to nie wszystkie tematy znajdują swoje odzwierciedlenie w programie szkolnym; przynajmniej część z nich ma przygotować ucznia do rozumienia matematyki wyższej – wymaganej przecież na studiach przyrodniczych czy technicznych. Stąd też w niektórych miejscach wirtualnego świata pojawiają się tematy „mocno pozaszkolne", na przykład: szeregi liczbowe, pochodne, całki, a nawet równania różniczkowe.

niania źródeł, pomocna okazała się **filozofia**. Dla przykładu: przybliżając matematyczne pojęcie nieskończoności (obecne czy to w teorii zbiorów, czy w analizie matematycznej) odwołano się aż do intuicji filozofów starożytnych – przywołując np. paradoksy Zenona z Elei, czy rozmyślania Arystotelesa o nieskończoności potencjalnej i aktualnej. Sięgnięto także do metody sokratejskiej zwanej majeutyczną. Na przykład, w jednym z materiałów reporterka radiowa rozmawia z rolnikiem o zbiorach: zadając mu odpowiednie pytania i odwołując się do prostych codziennych intuicji, wydobywa zeń ukrytą wiedzę o równoliczności zbiorów i różnych typach nieskończoności[5].

O ile problem źródeł poznania matematycznego stanowi wstęp do tematyki centralnej (czyli twierdzeń i ich dowodów), to kolejny element omawianej struktury jest jej rozwinięciem. Chodzi o prezentację **zastosowań matematyki** (fizycznych, technicznych, biologicznych *etc.*), które to zastosowania muszą wynikać z treści odpowiednich twierdzeń. Dobry przykład to współczesne rozwinięcie logiki (nawet tej najprostszej: zdaniowej i predykatowej) w kierunku informatycznych systemów sztucznej inteligencji. Przykład inny, tym razem z dziedziny matematyki dyskretnej, to różnego rodzaju kody szyfrujące, a także metody ich korekcji i ewentualnego rozszyfrowywania.

By uzyskać pełny obraz metodologicznej struktury projektu nie sposób pominąć elementu, który czyni z Archipelagu Matematyki grę. Chodzi oczywiście o różnego rodzaju **sprawdziany** (w tym: testy, zadania matematyczne i mini-gry), które pozwalają graczom zdobywać punkty, odznaczenia i nagrody[6].

---

[5] Wspomniany dialog z rolnikiem o zbiorach jest dostępny również w dyskusyjnym blogu akademickim, którego autor artykułu jest współredaktorem. Oto jego adres: http://blog.marciszewski.eu/?p=3389.

Innego rodzaju materiały, za pośrednictwem których odkrywca Archipelagu może uzyskać wgląd w genezę matematycznych twierdzeń, to (animowane) biografie słynnych matematyków oraz filmowe wywiady z żywymi matematykami (którzy opowiadają o swojej drodze do matematyki oraz najbardziej istotnych osiągnięciach).

[6] Z metodologicznego i po części wewnętrznego punktu widzenia wypełniające opisaną strukturę materiały dzieliły się na następujące kategorie: 1) sfilmowane wywiady z ludźmi nauki, 2) animowane biografie wielkich matematyków i logików, 3) sfilmowane dowody matematyczne, 4) multimedialne prezentacje niezwykłych faktów matematycznych, 5) prezentacje zastosowań, 6) internetowe kursy i testy, 7) zadania interaktywne, 8) mini-gry komputerowe, 9) fikcyjne wywiady ze zwykłymi ludźmi poświęcone matematyce (tzw. mat-wywiady), 10) czaty z duchami słynnych uczonych z przeszłości.

1.3. Elementy filozofii

Jakkolwiek już w poprzednich punktach przedstawiłem niektóre filozoficzne wątki Archipelagu – związane z odsłanianiem źródeł matematyki (intuicyjnych i historycznych) oraz koncepcją platońskiego świata matematycznych bytów – to w rozdziale obecnym na nich się skoncentruję. Wyszczególnię przy tym **elementy treściowe** (czyli same materiały) oraz stosowane szerzej (niekoniecznie w ramach tychże materiałów) **metody**. I jedne, i drugie służą wprawdzie nadrzędnemu celowi popularyzacji matematyki, mają jednak charakter poza-matematyczny, powiązany najsilniej z filozofią.

Do części treściowej zaliczają się materiały następujące: a) **para-sokratejskie dialogi** ze zwykłymi ludźmi o pojęciach matematycznych oraz ich pozamatematycznych interpretacjach (są to tzw. mat-wywiady, np. z elektrykiem o indukcji, czy z księgowym o liczbach nieobliczalnych; zob. pkt. 2.3); b) spotkania, rozmowy i czaty z duchami **filozofów**, którzy łączyli w swoich dociekaniach filozofię z matematyką (jak Arystoteles czy Leibniz; zob. pkt. 2.2); c) specjalistyczne kursy dotyczące zagadnień z zakresu **filozofii matematyki** (np. zgodności matematycznych twierdzeń ze światem rzeczywistym czy istoty metody dedukcyjnej)[7].

Z wypunktowanymi wyżej typami materiałów idzie w parze element ważniejszy, a mianowicie przyjęta w projekcie **metodologia**, która wykracza poza matematykę, a ma często rodowód (lub charakter) filozoficzny.

Jej popularyzatorską podstawę stanowi coś, co uznaje się niekiedy za punkt wyjścia filozofii, a mianowicie: **zdziwienie**. Otóż, wybierając matematyczne treści do prezentacji, wielokrotnie stawiano na ich niezwykłość, niezgodność ze zdrowym rozsądkiem (pozorną), czy wręcz paradoksalność (znowu pozorną). Intencję tę dobrze oddają pytajne tytuły niektórych materiałów. Czy kwadrat ma więcej punktów niż bok? Czy istnieją liczby, których nie można obliczyć? Czy istnieje zbiór wszystkich zbiorów? Sformułowania tego rodzaju mają ucznia **zaintrygować**, a także – poprzez odniesienia do pewnych pojęć pierwotnych, mocno osadzonych w przednaukowej intuicji (jak zbiór czy obliczanie) – pozwalają mu oderwać się od kontekstu czysto matematycznego.

Pytajne formułowanie zagadnień prowadzi do kolejnej z metod zastosowanych w projekcie. Otóż, prezentując niektóre zagadnienia, zastosowano sokratejską metodę docierania do ukrytej wiedzy matematycznej ucznia za pomocą specjalnie dobranych pytań i skojarzeń, tzw. **metodę**

---

[7] Twórcą prawie wszystkich materiałów typu a), b) i c) jest autor niniejszego artykułu.

majeutyczną (wspominałem o niej w punkcie 1.2). W ten sposób starano się wyrobić w uczniach nawyk stawania wobec pytań (a nie tylko korzystania z gotowych metod). Zasygnalizowano też, że matematyka jest dziedziną otwartą, w której wciąż pojawiają się nowe zagadnienia i nowe metody.

Na koniec zaś kwestia najbliższa humanistyce. Z humanistycznego punktu widzenia bowiem najbardziej atrakcyjną spośród sugerowanych w projekcie metod (nauczania matematyki) jest **metoda dyskusji**. Zgodnie z nią matematyka (także jej stosunek do świata) ma dziwić, zastanawiać, niepokoić – a przez to zmuszać do własnych przemyśleń i konfrontowania tych przemyśleń ze zdaniem innych. Dobrą okazję do tego rodzaju dyskusji stanowią poglądy filozoficzne słynnych matematyków, np. G.W. Leibniza (zob. pkt. 2.2).

Stawiając sprawę w opisany sposób, twórcy Archipelagu próbowali zbudować pojęciowy pomost między matematyką, gdzie wiele faktów bezdyskusyjnie się stwierdza (np. przedstawiając dowód pewnego twierdzenia), a naukami **humanistycznymi**, gdzie dyskutuje się nad znaczeniem tychże faktów lub zasadnością prowadzących do nich metod. Mówiąc zaś bardziej dydaktycznie: usiłowali pozyskać dla matematyki uczniów o zainteresowaniach humanistycznych.

2. Autorskie przykłady materiałów

W obecnym rozdziale przedstawię autentyczne **przykłady** materiałów o tematyce matematyczno-filozoficznej (a dokładniej: ich wersje tekstowe), które obrazują dobrze założenia i metody opisane w rozdziale poprzednim. Jako **autor** wszystkich trzech tekstów (a także wielu innych, podobnych mam nadzieję) mam nadzieję, że okażą się one ciekawe same w sobie, a nie tylko jako pewien wycinek opisywanego projektu.

2.1 Fragmenty czatu z duchem Heraklita

Pierwszy przykład pochodzi z Wyspy Analizy Matematycznej, na której odbył się zarejestrowany przez media Archipelagu **czat z duchem Heraklita**. Duch ten, ze względu na swoje prekursorstwo w rozmyślaniach nad zmiennością, patronuje Wyspie Analizy Matematycznej (zwanej też Wyspą Ognia). W trakcie nieformalnej rozmowy z internautami duch przedstawia pewien pogląd na przedmiot i naturę matematyki, który stanowi coś w rodzaju ekstrapolacji jego starożytnych poglądów na matematykę współczesną[8].

A oto zapowiadana treść rozmowy:

prowadzący:
Witamy. Głównym bohaterem dzisiejszego czatu będzie Heraklit z Efezu. Ponieważ Gość nasz przybywa z zamierzchłej przeszłości, warto wypowiedzieć kilka słów wstępu.

Otóż Heraklit należy do tych uczonych starożytnych – tzw. **presokratyków** – którzy przecierali dopiero ścieżki ludzkiej myśli. Przecierali je w starciu z dawnym, mitycznym obrazem świata, który powoli, pod naciskiem kolejnych filozoficznych konstrukcji, odchodził w zapomnienie.

Za temat przewodni swych dociekań obrał Heraklit **zmienność** – zmienność świata, człowieka i cywilizacji. Z tego właśnie powodu stanowi dla naszej Wyspy postać niezwykle ważną. Dzieło jego znamy słabo, bo przetrwało w nielicznych tylko fragmentach i bardziej licznych, lecz z pewnością mniej wiarygodnych, relacjach następców.

Wiedząc o tym wszystkim, możemy przystąpić do dyskusji.

heraklit:
Dziękuję bardzo za słowo wstępne i czekam na pierwszy głos.

vader:
Witam.

Szanowny Panie Duchu, co mają na myśli ci, którzy zwą Heraklita filozofem mętnym, ciemnym i płaczącym?

heraklit:
Szanowny Panie *vader*, już wyjaśniam. Zwą mnie **ciemnym**, bo styl moich dzieł jest metaforyczny i symboliczny, a przez to nie zawsze jasny. Zwą mnie **płaczliwym**, bom widział jasno, że wszystko się zmienia, niszczeje i przemija. I nad tym właśnie mój duch bolał.

---

[8] Należy podkreślić, że ponieważ rozmówcą internautów jest duch (wiedzący co nieco o dzisiejszej matematyce), nie przekazuje on wiernie starożytnej myśli Heraklita (która zresztą i tak jest różnorodnie interpretowana), lecz pewien swój nowoczesny pogląd na jej związki z matematyką.

wilma:

Przepraszam za maniery kolegi. Zaczął niezbyt miło. Ja chciałabym usłyszeć, jakimi to metaforami i obrazami opisywał Pan świat?

heraklit:

Przepraszać nie trzeba, bo zgodziłem się przecież na luźną formę internetowego czatu. A oto i mała próbka moich symboli.

Symbol pierwszy to RZEKA. Rzeka bez ustanku płynie; woda, która napływa różni się od tej, która już spłynęła, a rwący nurt wciąż na nowo drąży dno i brzegi…

Symbol drugi to OGIEŃ. Rzeka płynie, ogień płonie. Płomień nieustannie zmienia kształt, wypala drwa, niszczy... Lecz tkwi w nim także życie, bo daje niezbędne do życia ciepło i światło.

Symbol trzeci to EFEMERYDA. Efemerydzie – istocie, która trwa tylko chwilę – wydaje się, że wszystko wokół nie przemija wcale. Tymczasem wszystko mija, choć nie tak prędko, jak w ulotnym życiu efemerydy.

wilma:

Zdaje się jednak, że to symbol ognia był dla Pana najważniejszy…

heraklit:

Zgadza się. Zresztą, dla mnie nie był to tylko symbol. Uważałem, że ogień stanowi pierwotne **tworzywo** świata, tzw. *arche*, a jego własności wpływają najbardziej na bieg spraw w świecie.

Ów będący pierwotnym tworzywem ogień oczywiście się przeistacza i przyjmuje różne **formy**, np. formę wody, powietrza czy ziemi.

Sam ogień jednak jest najważniejszy.

vader:

Wybaczy Pan, Panie Duchu, ale śmiać mi się chce. Czytałem trochę te wasze teksty i mówią one mniej więcej tak.

Wiecznie płonący ogień spływa gdzieś z górnych warstw atmosfery; spływając zamienia się w powietrze; powietrze z kolei skrapla się, przyjmując formę wody, a ta na samym dole gęstnieje i przemienia się w ziemię. Ziemia z kolei paruje, para przeistacza się w wodę, woda ta przybiera formę chmur, te zaś, u samej góry, znów przyjmują postać ognia. Mamy więc jeden odwieczny cykl, i cztery **żywioły** z ogniem na czele – tłumaczące wszystko.

Brzmi to doprawdy dziecinnie. W naszym świecie istnieje komiks dla dzieci, komiks o czterech wróżkach WITCH, które niczym w Pana pismach posługują się mocą ognia, ziemi, powietrza i wody.

Ale to jest komiks dla dzieci!

heraklit:

Proszę się tak nie rozpalać. Zachowuje się Pan jak niemądra **efemeryda**, która wierzy w to, że jej dzisiejsza wiedza to kres tego, co można poznać.

Czy nie widzi Pan, że współczesne teorie też się zmieniają, i to dużo gwałtowniej niż w starożytności. Jestem pewien, że za x lat, będą brzmieć równie dziecinnie jak starożytne opowieści o czterech żywiołach: ogniu, ziemi, powietrzu i wodzie.

Podkreślę jednak, że ja starałem się uchwycić w tym wszystkim coś **niezmiennego**.

vader:

A co?

heraklit:

A to, że najbardziej ogólnym prawem, prawem niezmiennym, jest **prawo ciągłej zmiany**.

vader:

Też mi odkrycie.

heraklit:

Niech Pan nie zapomina, że w moich czasach byli tacy – nawet duch jednego z nich, duch **Zenona**, jest tu z nami – którzy gwałtownie przeciwko temu protestowali. Formułowali paradoksy. Wysuwali logiczne argumenty. Dla nich ruch i zmiana były **złudzeniem**. Złudzeniem, za którym miała stać prawdziwa i niezmienna rzeczywistość.

platonik:

I dzisiaj tacy są. Wierzą, że istnieje ukryty pod powierzchnią zjawisk niezmienny świat bytów wieczno-trwałych. Należą do nich obiekty matematyczne.

heraklit:

Ja w to nie wierzyłem i nie wierzę. W waszych czasach zresztą i obiekty matematyczne, i sama **matematyka**, zmieniły się. Matematyka wasza pozwala uchwycić to, co zmienne.

Czym jest funkcja? Opisem zmienności.

Czym jest pochodna funkcji? Miarą siły i kierunku tejże zmienności.

Czym jest rachunek **różniczkowy**? Ścisłą nauką o tejże zmienności, zmienności rozpatrywanej nawet w sytuacjach granicznych.

Pytacie przecież: „*Co się dzieje, gdy x dąży do nieskończoności*?”, albo „*Co się dzieje, gdy x dąży do zera?*”.

platonik:

No tak. Ale matematyczne definicje są ścisłe, można powiedzieć: idealne. Stosują się zatem do jakichś obiektów idealnych, a nie do rzeczy w świecie. Żadne realne koło, na przykład, nie spełni definicji koła. Żadna realna zmiana w zwykłym świecie nie jest tym samym co jakaś wyidealizowana, matematyczna funkcja (opisująca rzekomo tę zmianę).

heraklit:

Ale cóż w tym złego. Ludzie posługują się precyzyjnym **językiem** matematycznym – jak Pan powiedział: idealnym – i dzięki temu mogą lepiej się porozumieć. A że język nie pasuje do świata idealnie – to trudno…

platonik:

Mi chodziło o to, że obiekty matematyczne – te, do których odnosi matematyczny język – muszą być wieczne i niezmienne…

heraklit:

A dlaczegóż to? Czy nie łudzimy się ponownie, przyjmując punkt widzenia ulotnej efemerydy? Czy nie postrzegamy matematyki jako niezmiennej, bo sami przemijamy tak szybko?

Twierdzę, że matematyka **się zmienia**. Może bardzo wolno, najwolniej ze wszystkich nauk, ale zmienia się. I cieszę się, że zmiana ta idzie w kierunku coraz lepszego opisu zmiennego świata.

2.2. Spotkanie z duchem G.W. Leibniza

Przykład drugi dotyczy innego ducha – tym razem jest to duch Gottfrieda Wilhelma Leibniza. Otóż pewnego razu odbywa się na Wyspie

Liczb **spotkanie dyskusyjne** z tymże duchem (czyli coś dla humanistów!), na którym wygłasza on swoje słynne motto:

„*Cum deus calculat, fit mundus*”,
co znaczy po polsku:
„*Gdy Bóg rachuje, staje się świat*”.

Uczestnicy spotkania proszą o objaśnienie tej sentencji w języku bardziej współczesnym, co duch czyni, mówiąc:

„*Najbardziej pierwotnym tworzywem świata są liczby. W ostatecznym rachunku wszystko daje się opisać liczbowo, czyli matematycznie. A zatem: jeśli Bóg istnieje, to jest matematykiem operującym na liczbach. My postrzegamy zwykły świat, tymczasem On widzi reprezentujące świat liczby. Przekształcając liczby, a więc rachując, Bóg zmienia to, co jest liczbowo zakodowane, czyli świat*”.

Po tym objaśnieniu wywiązuje się zażarta wymiana zdań z uczestnikami (przedstawiona w Archipelagu jako krótki czat):

***anty1*:**
Nie jestem żadną liczbą. Ja to ja. Żaden matematyk nie jest w stanie opisać tego, co czuję. Żadna liczba nie wyrazi mojej indywidualności.

***leibniz*:**
Pomyśl o liczbach niewymiernych, takich jak π czy e. Dziś znacie je dobrze. Każda liczba niewymierna to osobna jakby indywidualność, bo ma nieskończone i nieregularne rozwinięcie dziesiętne. Każda różni się od każdej, tak jak ludzie różnią się między sobą. A jest ich nieskończenie wiele.

anty1:
Nadal nie rozumiem jak można by zakodować mnie jako liczbę. Czy coś, tak skomplikowanego jak człowiek, można porównywać do liczb?

leibniz:
Pomyśl o komputerach i programach komputerowych. Dziś jest ich mnóstwo. Ja kiedyś zbudowałem maszynę liczącą, ale oczywiście nie był to komputer w dzisiejszym rozumieniu. Otóż wasze programy

komputerowe robią wiele rzeczy, które wcześniej były domeną ludzi: grają w szachy, logicznie wnioskują, nawet uczą się. A czym są programy? I jak je można zakodować w pamięci komputera? Wiecie przecież: jako gigantyczne, binarne liczby.

anty2:

Czy Bóg byłby zatem jakimś kosmicznym programistą? Czy jesteśmy automatami programowanymi przez Boga? (…)

2.3. Radiowy dialog „Z księgowym o liczbach nieobliczalnych”

Ostatni przykład ma charakter zdecydowanie bardziej współczesny. Dotyczy frapującego zagadnienia liczb nieobliczalnych, które prowadzi wprost do *stricte* filozoficznych pytań o moc poznawczą ludzkiego umysłu. Przedstawiony dialog należy do kategorii tzw. **mat-wywiadów**, czyli rozmów ze zwykłymi ludźmi o ważnych (choć niekiedy bardzo abstrakcyjnych) pojęciach matematycznych. Przyjęta forma dialogu, polegającego na powolnym doprowadzaniu rozmówcy do zaskakującej dlań wiedzy, ma źródła sokratejsko-platońskie.

A oto i tekst mat-wywiadu:

[Wstęp] W niewielkim pomieszczeniu biurowym pracuje przy komputerze młody mężczyzna. Przypatruje mu się stojąca w drzwiach reporterka archipelagowego radia MAT. Gdy mężczyzna przerywa pisanie na komputerze, odzywa się doń.

– Dzień dobry. Przypatruję się Panu od dłuższej chwili i widzę, że Pan ostro liczy…

– Taka praca. A Pani, przepraszam, do kogo? Była Pani umówiona?

– A i owszem. Chyba nawet z Panem: 17.30, wywiad z księgowym o liczbach.

– Oj, faktycznie. Bardzo Panią przepraszam. Za chwilkę będę gotowy…

Odwraca się do komputera. Wpisuje pospiesznie ostatnie dane, zamyka laptop i mówi:

– W porządku, możemy zaczynać.

- *W takim razie, raz jeszcze dzień dobry. Wyjaśnię na początek, że wywiad nasz ukaże się na antenie radia edukacyjnego MAT, a ma traktować o liczbach nieobliczalnych.*

– Pamiętam, pamiętam… I przyznam się, że temat ten nadal brzmi dla mnie dość frapująco.

– Domyślam się, że to nie liczby Pana frapują, lecz ich ewentualna nieobliczalność?

– No tak! Na mój zdrowy księgowy rozum liczba to coś, co można obliczyć. Nie zawsze samemu, częściej za pomocą kalkulatora lub komputera, ale zawsze jakoś można…

– A z jakimi liczbami ma Pan w swoim księgowym fachu do czynienia?

– No cóż. Ze zwykłymi raczej. Przed chwilą, na przykład, sumowałem w Excelu liczby czterocyfrowe z dwoma miejscami po przecinku.

– Ale nie były to liczby naturalne?

– No nie. O ile dobrze pamiętam, liczby naturalne to 1, 2, 3, 4 itd., zawsze o jeden więcej. Bez żadnych miejsc po przecinku. Takie jakby najprostsze liczby całkowite.

– To się oczywiście zgadza. A te Pańskie „zwykłe liczby z Excela” są, rzecz jasna, bardziej skomplikowane. Jakbyśmy je nazwali?

– Czy ja wiem? Ułamki? … Liczby dziesiętne z częścią ułamkową? … Wymierne chyba. Tak: wymierne.

– No tak. Przypomnę słuchaczom, że jakkolwiek liczby wymierne można przedstawiać w postaci dziesiętnej (np. 7/4 to 1.75), to definiuje się je jako liczby postaci „m dzielone przez n”, gdzie zarówno m, jak i n, należą do liczb całkowitych.

A teraz pytanie do Pana: czy według Pana prócz wielkości wymiernych istnieją inne jeszcze rodzaje liczb?

– No tak! Są jeszcze liczby niewymierne.

– Może jakiś przykład?

– Jasne. Na przykład Pi, czyli 3 i 14 setnych.

– A dalej?

– No właśnie. Dalej to, po pierwsze, nie pamiętam, a po drugie, pamiętam, że nie ma żadnej reguły, która pozwalałaby wypisywać kolejne cyfry.

– Dobrze Pan to ujął. Właśnie ów brak reguły powoduje, że Pi jest liczbą niewymierną, czyli taką, której nie da się przedstawić w postaci m/n.

– Aaaha. Czyli to tu pojawia się nieobliczalność… Prawdę mówiąc, trochę się rozczarowałem.

– Niech Pan się nie denerwuje. To jeszcze nie TO...

– Jak to: nie TO?

– TO jeszcze nie jest liczba nieobliczalna. Liczba Pi, a razem z nią wiele innych wielkości niewymiernych (choćby pierwiastek z dwóch) ma tę własność, że da się ją obliczyć z dowolną zadaną dokładnością.

– Tutaj się nieco pogubiłem. W jaki sposób można ją obliczyć z dowolną zadaną dokładnością, skoro nie znamy reguły generowania kolejnych cyfr jej rozwinięcia dziesiętnego?

– W pewnym sensie regułę znamy. Ale jest ona dana w sposób dość skomplikowany, za pomocą nieskończonego szeregu liczbowego, którego granicą jest właśnie liczba Pi. Ten szereg to jakby nieskończona suma liczb, które określamy jednolitym wzorem.

– Rozumiem. Mamy ten wzór i mamy regułę sumowania. A to wystarczy, by naszą liczbę obliczać coraz dokładniej…

– Dokładnie tak jest. A im więcej sumujemy kolejnych liczb (naprawdę, są to wyrazy pewnego ciągu), tym większą zyskujemy dokładność.

– Konkludując: Pi jest liczbą niewymierną, choć obliczalną.

– Powiedział Pan jak matematyk.

– Bo rzecz mnie wciąga. Domyślam się, że istnieją jakieś specjalne liczby niewymierne, których nie sposób obliczyć na podobieństwo Pi…

– Tak jest. Ich istnienie udowodnił w XX wieku Alan Turing – jeden z pierwszych i najlepszych podówczas specjalistów od maszyn liczących.

– Podał jakiś przykład?

– Nie. Lecz wykazał ściśle, że założenie o istnieniu liczb wyłącznie obliczalnych prowadzi do logicznej sprzeczności. Tym samym stało się jasne, że muszą istnieć nieuchwytne dla maszyn rodzaje liczb niewymiernych. A co więcej: musi być ich nieskończenie wiele.

– Powiedziała Pani: „nieuchwytne dla maszyn". Ale jakich?

– Cyfrowych. Dowód Turinga dotyczy maszyn cyfrowych, a konkretniej wszelkich możliwych algorytmów, które mogą być wykonane na wszelkich możliwych maszynach cyfrowych. Powtórzę jeszcze raz: wszelkich. Tych, które już skonstruowano, i tych, które dopiero zostaną wynalezione.

– Teoretycznie zatem: istnieją jakieś problemy, np. z dziedziny księgowości, którym ani mój laptop, ani żaden inny komputer cyfrowy, po prostu nie poradzi. Byłyby to takie problemy, których rozwiązaniami są liczby nieobliczalne.

– Tak. Tak wynika z matematycznych rozumowań Turinga. Liczby nieobliczalne są w pewnym sensie równoważne problemom nierozwiązywalnym przez maszyny cyfrowe. No i tutaj właśnie, w dziedzinie problemów a nie samych liczb, podał Turing sugestywny przykład.

– ???

– Mówiąc z grubsza, postawił problem napisania algorytmu, który sprawdzałby, dla jakich danych inne algorytmy kończą pracę, a dla jakich się zapętlają. Okazało się, że jest to zadanie niewykonalne – innymi słowy, nieobliczalne. Potem zaś odkryto takich zadań więcej.

– Smutne…

– Czy ja wiem? Może nawet krzepiące. Być może ludzki umysł w tym właśnie przewyższa komputery, że potrafi dostrzegać i rozwiązywać problemy nieobliczalne?

– Hmm. Muszę nad tym pomyśleć. Bo filozoficznie rzecz biorąc, jeśli Pani pozwoli, owo intrygujące „umysłowe być-może" jest, być może, kolejnym nieuchwytnym dla maszyn problemem nieobliczalnym. To znaczy: trudno mi sobie wyobrazić, aby jakiś komputer potrafił Pani pytanie rozstrzygnąć?

– Hmm. Tym razem to i ja chyba, i słuchacze, będziemy to musieli przemyśleć. Tymczasem pora kończyć. Dziękuję pięknie za wywiad i filozoficzne zakończenie.

III. UWAGI KOŃCOWE

Opisane w niniejszym artykule przedsięwzięcie jest ukierunkowane na popularyzację i nauczanie matematyki. Mimo to – ze względu na częściowo filozoficzną formę przekazu – wolno uznać je za dobrą okazję do propagowania **samej filozofii**. Przykładowo: nauczyciele lub wykładowcy przedmiotów filozoficznych mogliby korzystać z opisanych wyżej zasobów na swoich zajęciach – podkreślając przy tym istotne, merytoryczno-historyczne, związki między „matką" i „królową nauk".

Powiedzmy nawet więcej: Archipelag Matematyki zachęca dydaktyków filozofii do stosowania pewnej, inicjowanej **matematycznie**, strategii nauczania. Mówiąc bardzo ogólnie, przedstawia się ona następująco:

a) wychodzimy od pewnego, zdefiniowanego ściśle, pojęcia mate-matycznego (np. pojęcia nieskończonej liczności zbioru), b) objaśniamy jego filozoficzne źródła (np. historyczne poglądy na nieskończoność) oraz poza-matematyczne implikacje (np. ograniczenia ludzkiego poznania związane z relacją [skończony umysł *vs* nieskończony świat]), c) wywołujemy dyskusję na temat możliwości poszerzenia lub zmiany matematycznego punktu wyjścia (np. innego ujęcia nieskończoności niż cantorowskie).

Stosowaniu powyższej strategii sprzyja fakt, że Archipelag Matematyki jest platformą **otwartą**, którą warto wzbogacać o własne pomysły i własne materiały. Aż się prosi zatem, by w jej rozbudowę włączyli się także inspirowani matematycznie dydaktycy filozofii. Dopowiedzmy, że jest to całkowicie zgodne z szerokim celem projektu: opowiadać o matematyce, wykraczając poza nią samą.

Na koniec zaś uwaga prawie futurystyczna. Otóż można sobie wyobrazić (i to także pozostaje w zgodzie z zamysłem twórców), że idea Archipelagu przyjmie się na polu popularyzacji innych nauk niż matematyka. Gdyby tak się stało, to mogłyby powstać – w oparciu o już istniejący informatyczny szkielet Archipelagu Matematyki – wirtualne światy innych nauk, w tym filozofii.

LITERATURA I ŹRÓDŁA INTERNETOWE

Archipelag Matematyki (http://www.archipelagmatematyki.pl), multime. dialne środowisko nauczania i poznawania matematyki.

Cafe Aleph (http://blog.marciszewski.eu/), akademicki blog dyskusyjny W. Marciszewskiego i P. Stacewicza, zawierający sporo materiałów z pogranicza matematyki i filozofii.

Davis P. J., Hersch R.: *Świat Matematyki*, Warszawa 1994.

Kordos M.: *Wykłady z historii matematyki,* WSiP, Warszawa 1994.

Marciszewski W.: *„Mathesis Universalis" na nasze czasy. Wkład Fregego, Cantora i Gödla,* „Zagadnienia Naukoznawstwa", nr 4(190), 2011, s.139-152.

Marciszewski W.: *Sztuczna inteligencja*, Społeczny Instytut Wydawniczy „Znak", Kraków 1998.

Marciszewski W., Stacewicz P.: *Umysł – Komputer –Świat. O zagadce umysłu z informatycznego punktu widzenia*, Wydawnictwo EXIT, Warszawa 2011.

Murawski R.: *Filozofia Matematyki. Zarys dziejów*, PWN, Warszawa 1995.

Platon: *Dialogi*, wyd. Unia Wydawnicza „Verum”, Warszawa 2007.
Sikora A.: *Od Heraklita do Husserla*, Wydawnictwo OPEN, Warszawa 2001.
Stacewicz P., *Co łączy umysł z teorią liczb?* „Filozofia Nauki”, 3 (79), 2012.
Tatarkiewicz W.: *Historia Filozofii*, t. 1-3, PWN, Warszawa 1990.
Turing A. M.: *On Computabe Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem*. „Proc. Lond. Math. Soc” 1936, (2) 42, s. 230-265; *A Correction*, ibid., 43, 1937, s. 544-546.
Trzęsicki K.: *Leibnizjańskie inspiracje informatyki*. „Filozofia Nauki” nr 3 (55), 2006, s. 21–48.

Summary

The article treats about methodology of educational project, Archipelago of Mathematics (AM), that results in a multimedia environment of learning and discovering mathematics (available at www.archipelag-matematyki.pl). A large part of this methodology is related to philosophy, i.e. philosophical questions, interpretations and discussions (both historical, associated with the history of science, and contemporary).

In the first part of the paper I describe synthetically the structure, goals and methods of AM (emphasizing philosophical aspects of the project). In the second part I present three examples of AM contents (designed by me): (1) quasi-internet chat with the ghost of Heraclitus of Ephesus (on variability in mathematics), (2) selected fragments of discussion about famous Leibniz's motto *Cum Deus calculat, fit mundis*, and (3) ratio-style interview with an accountant about uncomputable numbers and the idea of computability. I treat these presentations as non-standard way of teaching philosophy (not only mathematics).

Key words: Philosophical education, mathematics, virtual world of mathematics, variability, computability.